Notatki do wykładu Geometria Różniczkowa I

Katarzyna Grabowska, KMMF

14 grudnia 2013

1 Całkowanie form różniczkowych

1.1 Gładki rozkład jedności, cd.

Twierdzenie 1 *Na rozmaitości parazwartej istnieje gładki rozkład jedności.*

Dowód: Rozkład jedności konstruujemy dla każdej składowej spójnej oddzielnie, dlatego założymy teraz, że M jest spójna. W dalszym ciągu B_r oznaczać będzie otwartą kulę w $\mathbb{R}^n$ o promieniu r. Używać będziemy B_1 i B_3. Potrzebna będzie też funkcja

$$h:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad h(t)=\exp\left(\frac{1}{(t-2)(t-1)}\right)\quad \text{dla}\quad t\in]1,2[,\quad h(t)=0\quad \text{w przeciwnym razie.}$$

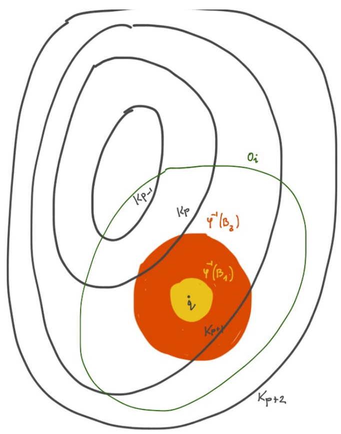
Definiujemy teraz funkcję $f:[0,\infty[\to\mathbb{R}$ wzorem

Rys. 1: Funkcja h

$$f(x)=\frac{\displaystyle\int_x^2 h(t)dt}{\displaystyle\int_1^2 h(t)dt}.$$

Funkcja ta jest gładka, ma wartość 1 dla $x\in[0,1]$ oraz 0 dla $x\in[2,\infty[$.

Jako rozmaitość parazwarta M jest przeliczalna w nieskończoności, to znaczy można ją wyczerpać zbiorami zwartymi $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ o tej własności, że $K_i \subset \mathfrak{Int}K_{i+1}$. Rozpoczynamy od danego pokrycia otwartego $\{\mathcal{O}_i\}_{i\in I}$. Ustalmy na chwilę punkt $q \in M$. Istnieje $p \in \mathbb{N}$ takie, że $q \in K_{p+1} \setminus K_p$, istnieje także $i \in I$ takie, że $q \in \mathcal{O}_i$. Bierzemy teraz układ współrzędnych $(\mathcal{V}_q, \varphi_q)$ w otoczeniu q taki, żeby $\varphi_q(q) = 0$ $\varphi_q^{-1}(B_3) \subset \mathcal{O}_i$, $\varphi_q^{-1}(B_3) \subset K_{p+2} \setminus K_{p-1}$. Rozważając



Rys. 2: Rysunek pomocniczy

odpowiednie układy współrzędnych dla wszystkich $q \in M$ otrzymujemy atlas $(V_q, \varphi_q)_{q\in M}$. W szczególności zbiory $\{\varphi_q^{-1}(B_1)\}_{q\imath M}$ stanowią pokrycie otwarte $\mathcal{V}$ rozmaitości M. Wybierzemy teraz z niego pokrycie przeliczalne, lokalnie skończone: $\mathcal{V}$ jest także pokryciem K_1, można więc z niego wybrać pokrycie skończone. Mamy więc $(q_1, \ldots, q_{j_1})$ punktów takich, że $\{\varphi_{q_{j_k}}^{-1}(B_1)\}$ stanowią pokrycie K_1. Zbiór $K_2 \setminus \mathfrak{Int}K_1$ też jest zwarty, więc ma pokrycie skończone wybrane z $\mathcal{V}$. To daje nam kolejne $\{q_{j_1+1}, \ldots, q_{j_2}\}$ punkty, takie, że $\{\varphi_{q_k}^{-1}(B_1)\}_{k\leqslant j_2}$ jest pokryciem K_2. Indukcyjnie otrzymujemy $(q_{j_p+1}, \ldots, q_{j_{p+1}})$ punktów definiujących pokrycie $K_{p+1} \setminus K_p$ i takie, że $\{\varphi_{q_k}^{-1}(B_1)\}_{k\leqslant j_{p+1}}$ stanowią pokrycie K_{p+1}. Postępując w ten sposób otrzymujemy przeliczalne pokrycie M zbiorami $\varphi_{q_k}^{-1}(B_1)$. Oczywiście także układ zbiorów $\mathcal{U}_k = \varphi_{q_k}^{-1}(B_3)$ jest pokryciem M. Wraz z odwzorowaniami φ_{q_k} układ ten tworzy atlas drobniejszy niż wyjściowe pokrycie $(\mathcal{O}_i)$. Łatwo też przekonać się, że atlas ten jest lokalnie skończony. Używając zdefiniowanej wcześniej funkcji f definiujemy rodzinę funkcji d_k wzorem

$$d_k(q) = f(|\varphi_{q_k}(q)|), \quad \text{jeśli} \quad \varphi_{q_k}(q) \quad \text{istnieje, w przeciwnym przypadku} \quad d_k(q) = 0.$$

Ostatecznie

$$\alpha_k(q) = \frac{d_k(q)}{\sum_i d_i(q)}$$

jest szukanym rozkładem jedności. Nośnik każdej z funkcji α_j jest zawarty w którymś ze zbiorów wyjściowego pokrycia $(\mathcal{O}_i)$

Rozkładu jedności można użyć np. do pokazania następującego przydatnego twierdzenia

Twierdzenie 2 *Na rozmaitości orientowalnej wymiaru n istnieje gładka nieznikająca n-forma i odwrotnie, jeśli taka forma istnieje, to rozmaitość jest orientowalna.*

Dowód: Weźmy lokalnie skończony atlas na M taki, że wszystkie zamiany zmiennych mają dodatni jacobian. Niech $(\alpha_i)_{i\in I}$ będzie rozkładem jedności związanym z tym atlasem. W każdej dziedzinie mapy $\mathcal{O}_i$ definiujemy formę ω_i posługując się współrzędnymi $(x_i^1, \dots x_i^n)$:

$$\omega_i = \alpha_i \mathsf{d}x_i^1 \wedge \mathsf{d}x_i^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x_i^n.$$

Forma

$$\omega = \sum_{i\in I} \alpha_i \mathsf{d}x_i^1 \wedge \mathsf{d}x_i^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x_i^n$$

ma żądaną własność, tzn jest nieznikająca w każdym punkcie. Istotnie, niech $p \in M$ będzie dowolne, niech także $\{i_1, i_2, \dots i_m\}$ będzie zbiorem indeksów odpowiadających tym elementom atlasu, które przecinają się z otoczeniem $\mathcal{W}$ punktu p. W punkcie p formę ω można więc zapisać jako

$$\omega(p) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{i_k}(p) \mathsf{d}x_{i_k}^1 \wedge \mathsf{d}x_{i_k}^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x_{i_k}^n$$

Punkt p wraz z pewnym otoczeniem leży w dziedzinie każdej z map z indeksami ze zbioru $\{i_1, i_2, \dots i_m\}$, możemy więc wszystkie składniki powyższej sumy zapisać w jednym układzie współrzędnych, na przykład w $(x_{i_1}^1, \dots x_{i_1}^n)$:

$$\omega(p) = \left[\alpha_{i_1}(p) + \sum_{k=2}^{m} \alpha_{i_k}(p) \det\left([\varphi_{i_k} \circ \varphi_{i_1}^{-1}]'\right)\right] \mathsf{d}x_{i_1}^1 \wedge \mathsf{d}x_{i_1}^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x_{i_1}^n.$$

Wszystkie składniki powyższej sumy są dodatnie, zatem cała suma też jest dodatnia, w szczególności nie jest równa zero.

Wykażemy teraz, że jeśli istnieje nieznikająca n-forma to rozmaitość jest orientowalna. Niech ω będzie taką formą. Weźmy także atlas składający się z map o spójnych dziedzinach. W każdej z map forma ω może być zapisana we współrzędnych jako

$$f(x)\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n.$$

Ponieważ dziedzina mapy jest spójna funkcja f, jako niezerowa, ma ustalony znak. Jeśli jest to znak dodatni mapę tę pozostawiamy bez zmian, jeśli zaś ujemny mapę zmieniamy na przykład zamieniając pierwszą współrzędną na przeciwną. W ten sposób tworzymy nowy atlas w którym współczynniki funkcyjne przy współrzędnościowych n-formach dla formy ω są dodatnie. Skądinąd wiadomo, że na przecięciu dwóch map współczynniki te różnią się o jacobian zamiany zmiennych. Oznacza to, że wszystkie te jacobiany są dodatnie. Poprawiony przez nas atlas jest zgodny, tzn w szczególności może zadawać orientację na M.$\square$

Orientację na rozmaitości możemy więc zadać wskazując w zgodny sposób orientację każdej z przestrzeni stycznych, wskazując zgodny atlas lub wskazując niezerową formę. Orientacja zadawana przez formę, to ta orientacja przy której współczynniki funkcyjne w zapisie formy we współrzędnych są dodatnie. Formy tego rodzaju nazywa się często *formami objętości.*

1.2 Całkowanie form różniczkowych.

Na analizie zdefiniowano całkę Riemanna po nadającym się do całkowania obszarze D w $\mathbb{R}^n$. Nadający się do całkowania oznaczał mierzalny w sensie Jordana. Całkę Riemanna definiuje się korzystając z umiejętności liczenia objętości małych kostek w $\mathbb{R}^n$, wykorzystując zatem strukturę metryczną. Na rozmaitości nie mamy tej struktury, a próba skorzystania ze współrzędnych prowadzi do niepowodzenia. Nie możemy zdefiniować całki z funkcji f na rozmaitości D jako całki z $f \circ \varphi^{-1}$ po obszarze $\varphi(D)$, nawet zakładając, że mieści się on w dziedzinie jednej mapy, ponieważ wynik całowania zależał będzie od wybranych współrzędnych. Całka w mapie $(\mathcal{O}, \varphi)$ to

$$\int_{\varphi(D)} f \circ \varphi^{-1},$$

zaś całka w mapie $(\mathcal{U}, \psi)$ to

$$\int_{\psi(D)} f \circ \psi^{-1}.$$

Całki te nie są równe, gdyż (zgodnie z twierdzeniem o zamianie zmiennych)

$$\int_{\varphi(D)} f \circ \varphi^{-1} = \int_{\psi(D)} f \circ \psi^{-1} \left|\det[\psi \circ \varphi^{-1}]\right|.$$

Do całkowania po obszarze na rozmaitości potrzebujemy więc obiektu, który transformuje się „z jacobianem zamiany zmiennych”, czyli n-formy. Przyjrzyjmy się najpierw uproszczonej sytuacji, gdy obszar D mieści się w dziedzinie jednej (a nawet dwóch) map. Niech także ω będzie n-formą na M. Jej wyrażenia we współrzędnych w obu mapach $(\mathcal{O}, \varphi = (x^1, \ldots, x^n))$ to

$$\omega = a(x)\mathsf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n, \qquad \omega = b(y)\mathsf{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}y^n.$$

Funkcje a i b związane są równością

$$a(x) = b(\psi \circ \varphi^{-1}(x)) \det[\varphi \circ \psi^{-1}]$$

zatem całki mogą różnić się co najwyżej o znak.

$$\int_{\psi(D)} b = \int_{\varphi(D)} b \circ \psi \circ \varphi^{-1} \left|\det[\varphi \circ \psi^{-1}]\right| = \pm \int_{\varphi(D)} a.$$

Kłopot ze znakiem bierze się z faktu, że wyznacznik jacobianu może być zarówno dodatni jak i ujemny. Wyjściem z tej sytuacji jest zdefiniowanie całki po obszarze zorientowanym. Wybór konkretnej orientacji pozwala używać jedynie współrzędnych zgodnych z orientacją. Możemy już zdefiniować całkę po obszarze D z orientacją $\imath$ w uproszczonej sytuacji, gdy cały obszar mieści się w dziedzinie jednej mapy:

$$\int_{(D,\imath)} \omega = \int_{\varphi(D)} a \circ \varphi^{-1}, \qquad \omega = a\,\mathsf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n$$

gdzie $(\mathcal{O}, \varphi)$ jest mapą zgodną z orientacją. Gdy obszar D nie mieści się w dziedzinie jednej mapy potrzebujemy rozkładu jedności. Weźmy lokalnie skończony atlas $(\mathcal{O}_i, \varphi_i)_{i \in I}$ zgodny z orientacją $\imath$ i rozkład jedności $(\alpha_i)_{i \in I}$ związany z tym atlasem. W sposób trywialny prawdą jest, że

$$\omega(p) = \sum_{i \in I} \alpha_i \omega(p)$$

Całkę z formy ω po obszarze D z orientacją $\imath$ możemy teraz zdefiniować wzorem

$$\int_{(D,\imath)} = \sum_{i \in I} \int_{\varphi_i(D \cap \mathcal{O}_i)} (\alpha_i \circ \varphi^{-1})(\omega_i \circ \varphi^{-1})$$

Dla zwartego obszaru D jedynie skończona liczba składników jest niezerowa.

Przykład 1 Obliczyć całkę z formy $\omega = \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z$ po fragmencie sfery S^2 dla którego $x \geqslant 0$ i $z \geqslant 0$ z orientacją zadaną przez bazę wektory $(\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\varphi})$ pochodzące od sferycznego układu współrzędnych.

Forma ω zdefiniowana jest na $\mathbb{R}^3$. Żeby ją scałkować po S^2 trzeba ją najpierw obciąć do S^2. W tym celu zapisujemy włożenie $\kappa : S^2 \to \mathbb{R}^3$ we współrzędnych:

$$\kappa(\theta, \varphi) = (\cos\varphi \sin\theta, \sin\varphi \sin\theta, \cos\theta).$$

Obcięcie formy do sfery realizuje się jako pull-back za pomocą włożenia:

$$\kappa^*\omega = \mathsf{d}(\sin\varphi \sin\theta) \wedge \mathsf{d}(\cos\theta) = (\cos\varphi \sin\theta \mathsf{d}\varphi + \sin\varphi \cos\theta \mathsf{d}\theta) \wedge (-\sin\theta \mathsf{d}\theta) =$$
$$(\cos\varphi \sin\theta \mathsf{d}) \wedge (-\sin\theta \mathsf{d}\theta) = -\cos\varphi \sin^2\theta \; \mathsf{d}\varphi \wedge \mathsf{d}\theta$$

Kolejność współrzędnych zgodna z orientacją jest (θ, φ), więc formę zapisać należy jako

$$\omega = -\cos\varphi \sin^2\theta \; \mathsf{d}\varphi \wedge \mathsf{d}\theta = \cos\varphi \sin^2\theta \; \mathsf{d}\theta \wedge \mathsf{d}\varphi$$

Obszar całkowania we współrzędnych (θ, φ) to $[0, \frac{\pi}{2}] \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ostatecznie

$$\int_{(D,\imath)} \omega = \int_{[0,\frac{\pi}{2}]\times[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \cos\varphi \sin^2\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi d\varphi = \frac{\pi}{4} \cdot 2 = \frac{\pi}{2}$$