

Notatki do wykładu Geometria Różniczkowa I

Katarzyna Grabowska, KMMF

14 grudnia 2013

1 Całkowanie form różniczkowych

1.1 Twierdzenie Stokes'a

W dalszym ciągu E oznaczać będzie półprzestrzeń w \mathbb{R}^n , tzn. zbiór

$$E = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^1 \leq 0\}$$

z topologią indukowaną z \mathbb{R}^n (zbiory otwarte w E to przecięcia zbiorów otwartych w \mathbb{R}^n z E). Hipere płaszczyznę $\{x^1 = 0\}$ oznaczać będziemy Π . Zauważmy, że jeśli \mathcal{O} i \mathcal{U} są otwarte w E oraz $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U}$ jest homeomorfizmem, to obcięcie $\varphi|_{\mathcal{O} \cap \Pi}$ jest homeomorfizmem $\mathcal{O} \cap \Pi$ i $\mathcal{U} \cap \Pi$. Zbiór E służy jako „standardowa” rozmaitość z brzegiem, podobnie jak \mathbb{R}^n jest „standardową” rozmaitością (bez brzegu). Każdy kawałek rozmaitości z brzegiem powinien wyglądać jak kawałek E . Może to być kawałek brzegowy, albo kawałek z wnętrza. Do zdefiniowania struktury gładkiej rozmaitości z brzegiem potrzebujemy jeszcze pojęcia gładkości odwzorowań obszarów, których przecięcie z Π jest niepuste. Odwzorowanie $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U}$ jest gładkie jeśli da się rozszerzyć do gładkiego odwzorowania $\hat{\varphi} : \hat{\mathcal{O}} \rightarrow \hat{\mathcal{U}}$ takiego, że $\hat{\mathcal{O}}, \hat{\mathcal{U}} \subset \mathbb{R}^n$ są otwarte i $\mathcal{O} = E \cap \hat{\mathcal{O}}, \mathcal{U} = E \cap \hat{\mathcal{U}}$. W takim przypadku $\varphi|_{\mathcal{O} \cap \Pi}$ też jest gładkie.

Definicja 1 Przestrzeń topologiczna M jest *gładką rozmaitością z brzegiem* jeśli dla każdego $q \in M$ istnieją zbiory otwarte $q \in \mathcal{O} \subset M, \mathcal{U} \subset E$ i homeomorfizm $\varphi : \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{U}$. Jeśli ponadto $\mathcal{U} \cap \mathcal{U}' \neq \emptyset$, to odwzorowanie $\varphi' \circ \varphi^{-1}$ jest gładkie.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O} \cap \mathcal{O}' & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{O} \\ \downarrow \varphi' & \swarrow \varphi' \circ \varphi^{-1} & \\ \mathcal{O}' & & \end{array}$$

W rozmaitości z brzegiem wyróżniamy punkty wewnętrzne, tzn. takie, które mają otoczenia homeomorficzne z \mathbb{R}^n i pozostałe, które nazywamy *brzegowymi*. Zbiór punktów brzegowych oznaczamy ∂M i nazywamy *brzegiem rozmaitości*. Zauważmy, że brzeg rozmaitości z brzegiem sam jest gładką rozmaitością (bez brzegu, tzn. brzeg brzegu jest pusty). Istotnie, jeśli $(\mathcal{U}_i, \varphi_i)_{i \in I}$ jest atlasem na M , to $(\mathcal{U}_i \cap \partial M, \varphi_i|_{\mathcal{U}_i \cap \partial M})_{i \in I}$ jest atlasem na brzegu.

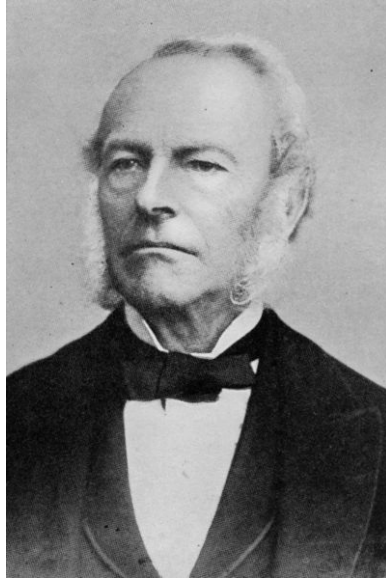
Fakt 1 Niech M będzie orientowaną rozmaitością z brzegiem. Wtedy ∂M też jest orientowana. Jeśli M jest zorientowana, to na ∂M istnieje wyróżniona orientacja.

Dowód. Wybierzmy jedną z orientacji na M . Niech $(\mathcal{O}_i, \varphi_i)_{i \in I}$ będzie atlasem zgodnym z orientacją. Indukowany atlas na M , którego dziedzinami są zbiory $\mathcal{O}_i \cap \partial M$ jest także atlasem zgodnym, tzn. wyznaczniki macierzy przejścia między współrzędnymi są dodatnie. Zauważmy, że jeśli $\varphi_i = (x_i^1, x_i^2, \dots, x_i^n)$ jest układem współrzędnych z dziedziną \mathcal{O} to $\tilde{\varphi}_i = (x_i^2, \dots, x_i^n)$ jest układem współrzędnych z dziedziną $\mathcal{O}_i \cap \partial M$. Atlas $(\mathcal{O}_i \cap \partial M, \tilde{\varphi}_i)$ zadaje indukowaną orientację brzegu. \square

Jeśli orientację M oznaczymy ι to orientację indukowaną ∂M oznaczać będziemy $\partial \iota$

Twierdzenie 1 (Sir George Gabriel Stokes) Niech M będzie zwartą zorientowaną powierzchnią z brzegiem wymiaru n i niech ω będzie $n - 1$ -formą na M , wówczas

$$\int_{(M, \iota)} d\omega = \int_{(\partial M, \partial \iota)} \omega.$$



Rys. 1: Sir George Gabriel Stokes

Żeby uzyskać wgląd w sytuację zobaczymy najpierw jak wygląda całkowanie po kostce w \mathbb{R}^n . Kostka co prawda, nie jest rozmaitością z brzegiem z powodu kątów (brzeg jest jedynie kawałkami powierzchnią), jednak z punktu widzenia całkowania kąty nie są kłopotliwe. Niech D będzie n -wymiarową kostką, tzn.

$$D = [a_1, b_1] \times [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n].$$

Brzeg D jest jedynie kawałkami powierzchnią, ale to nie bardzo przeszkadza. $(n - 1)$ -forma ω do całkowania po brzegu D może zostać zapisana w następujący sposób:

$$\omega = \omega_1 dx^2 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n - \omega_2 dx^1 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + (-1)^{n+1} \omega_n dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}.$$

Różniczkujemy:

$$\begin{aligned}
d\omega &= \frac{\partial\omega_1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n - \frac{\partial\omega_2}{\partial x^2} dx^2 \wedge dx^1 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + \\
&\quad (-1)^{n+1} \frac{\partial\omega_n}{\partial x^2} dx^n \wedge dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^{n-1} = \\
&\quad \frac{\partial\omega_1}{\partial x^1} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n + \frac{\partial\omega_2}{\partial x^2} dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n + \dots + \\
&\quad \frac{\partial\omega_n}{\partial x^n} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^n = \\
&\quad \left(\frac{\partial\omega_1}{\partial x^1} + \dots + \frac{\partial\omega_n}{\partial x^n} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \wedge \dots \wedge dx^n
\end{aligned}$$

Oznaczamy teraz ι orientację kanoniczną \mathbb{R}^n i całkujemy:

$$\begin{aligned}
\int_{D, \iota} d\omega &= \int_D \sum_{i=1}^n \frac{\partial\omega_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = \sum_{i=1}^n \int_D \frac{\partial\omega_i}{\partial x^i} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n = \\
&\quad \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} dx^2 \dots \text{bez } i \dots \int_{a_n}^{b_n} dx^n \int_{a_i}^{b_i} \frac{\partial\omega_i}{\partial x^i} dx^i = \\
&\quad \sum_{i=1}^n \int_{a_1}^{b_1} dx^2 \dots \text{bez } i \dots \int_{a_n}^{b_n} dx^n \left(\omega_i(x^1, \dots, b_i, \dots, x^n) - \omega_i(x^1, \dots, a_i, \dots, x^n) \right) = \\
&\quad \sum_{i=1}^n \int_{\{x^i=b^i\}} (\omega_i) dx^1 \dots \text{bez } i \dots dx^n - \sum_{i=1}^n \int_{\{x^i=a^i\}} (\omega_i) dx^1 \dots \text{bez } i \dots dx^n =
\end{aligned}$$

W powyższym wzorze $\{x^i = b^i\}$ oznacza ścianę kostki daną równaniem $x^i = b^i$. Rozważmy więc parę ścian z ustaloną i -tą współrzędną. Forma ω obcięta do ściany $\{x^i = b^i\}$, jest równa

$$\omega_{\{x^i=b^i\}} = (-1)^{i+1} \omega_i(x^1, \dots, b^i, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^k$$

a do ściany $\{x^i = a^i\}$

$$\omega_{\{x^i=a^i\}} = (-1)^{i+1} \omega_i(x^1, \dots, a^i, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \dots \wedge dx^k$$

Orientacja ściany $\{x^i = b_i\}$ indukowana przez orientację kanoniczną \mathbb{R}^n jest to orientacja zgodna z

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i-1}}, \frac{\partial}{\partial x^{i+1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^k} \right) \quad (1)$$

jeśli i jest nieparzyste a przeciwna gdy i parzyste. Odwrotnie jest na ścianie $\{x^i = b_i\}$: orientacja indukowana jest zgodna z (1) jeśli i parzyste i przeciwna jeśli i nieparzyste. Można więc napisać, że

$$\int_{\{x^i=b^i\}} (\omega_i) dx^1 \dots \text{bez } i \dots dx^n = (-1)^{i+1} \int_{\{x^i=b^i\}, \partial \iota} (\omega_i) dx^1 \wedge \dots \text{bez } i \dots \wedge dx^n$$

i

$$\int_{\{x^i=a^i\}} (\omega_i) dx^1 \dots \text{bez } i \dots dx^n = (-1)^i \int_{(\{x^i=a^i\}, \partial \iota)} (\omega_i) dx^1 \wedge \dots \text{bez } i \dots \wedge dx^n$$

i dalej

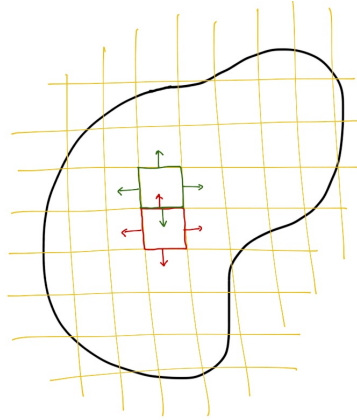
$$\int_{\{x^i=b^i\}} (\omega_i) dx^1 \dots \text{bez } i \dots dx^n = (-1)^{i+1} \int_{(\{x^i=b^i\}, \partial i)} (-1)^{i+1} \omega = \int_{(\{x^i=b^i\}, \partial i)} \omega,$$

$$\int_{\{x^i=a^i\}} (\omega_i) dx^1 \dots \text{bez } i \dots dx^n = (-1)^i \int_{(\{x^i=a^i\}, \partial i)} (-1)^{i+1} \omega = - \int_{(\{x^i=a^i\}, \partial i)} \omega.$$

Możemy zatem kontynuować pierwotny rachunek

$$= \sum_{i=1}^n \int_{(\{x^i=b^i\}, \partial i)} \omega + \sum_{i=1}^n \int_{(\{x^i=a^i\}, \partial i)} \omega = \int_{(\partial D, \partial i)} \omega.$$

Twierdzenie Stokes'a na kostce zostało zatem udowodnione. Nieco machając rękami możemy dalej argumentować następująco: Obszary w \mathbb{R}^n bedziej skomplikowane niż kostki możemy zawsze na kostki podzielić. Całkowanie po wewnętrznych kostkach, które mają przylegające do nich inne kostki nie da wkładu, gdyż wkład od każdej ze ścian zostanie równoważony przez wkład od ściany sąsiedniej kostki z przeciwną orientacją. Niezerowe zostaną jedynie wkłady z brzegów do których nic nie przylega (Rys 2). Żeby jednak nie opierać się jedynie na machaniu rękami



Rys. 2: Twierdzenie Stokes'a

przedstawiamy dowód Twierdzenia Stokes'a dla dowolnej zwartej powierzchni z brzegiem. Konieczne będzie użycie rozkładu jedności.

Dowód: Niech M będzie jak w założeniach twierdzenia. Weźmy skończony atlas $(\mathcal{O}_i, \varphi_i)_{i \in I}$ na M zgodny z orientacją. Zbiór indeksów I może być skończony, gdyż rozmaitość M jest zwarta. $(\tilde{\mathcal{O}}_i, \tilde{\varphi}_i)_{i \in I}$ oznaczać będzie odpowiedni atlas na ∂M . Korzystać będziemy także ze związanego z pokryciem $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ rozkładu jedności $(\alpha_i)_{i \in I}$. Zauważmy najpierw, że

$$d\omega = d(1 \cdot \omega) = d\left(\left(\sum_{i \in I} \alpha_i\right)\omega\right) = \sum_{i \in I} d(\alpha_i \omega).$$

Z drugiej jednak strony

$$d\left(\left(\sum_{i \in I} \alpha_i\right)\omega\right) = d\left(\sum_{i \in I} \alpha_i\right) \wedge \omega + \left(\sum_{i \in I} \alpha_i\right) d\omega = 0 + \sum_{i \in I} (\alpha_i d\omega).$$

Podsumowując, skoro zachodzi równość form

$$d\omega = \sum_{i \in I} d(\alpha_i \omega) = \sum_{i \in I} (\alpha_i d\omega),$$

to zachodzi także równość całek

$$I = \int_{(M, \nu)} d\omega = \int_{(M, \nu)} \sum_{i \in I} d(\alpha_i \omega) = \int_{(M, \nu)} \sum_{i \in I} (\alpha_i d\omega).$$

Zajmiemy się środkowym wyrażeniem

$$I = \int_{(M, \nu)} \sum_{i \in I} d(\alpha_i \omega) = \sum_{i \in I} \int_{(M, \nu)} d(\alpha_i \omega).$$

Każda z form $\alpha_i \omega$ ma nośnik w \mathcal{O}_i , podobnie $d(\alpha_i \omega)$, całkę można więc zapisać w i -tym układzie współrzędnych.

$$I = \sum_{i \in I} \int_{(\mathcal{O}_i, \nu)} d(\alpha_i \omega).$$

$\alpha_i \omega$ jest $(n - 1)$ -formą, więc ma postać

$$\alpha_i \omega = \sum_{k=1}^n f_i(x_i^1, \dots, x_i^n) dx_i^1 \wedge \dots^{(\text{bez } k)} \dots \wedge dx_i^n.$$

$$d(\alpha_i \omega) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i^k} dx_i^1 \wedge \dots \wedge dx_i^n$$

Z definicji całki z formy otrzymujemy

$$\int_{(\mathcal{O}_i, \nu)} d(\alpha_i \omega) = \int_{\varphi_i(\mathcal{O}_i)} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\partial f_i}{\partial x_i^k} dx_i^1 \dots dx_i^n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_{\varphi_i(\mathcal{O}_i)} \frac{\partial f_i}{\partial x_i^k} dx_i^1 \dots dx_i^n =$$

Korzystamy z twierdzenia Fubiniiego

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_{\mathcal{D}_i} dx_i^1 \dots^{(\text{bez } k)} \dots dx_i^n \int_{a^k(x)}^{b^k(x)} \frac{\partial f_i}{\partial x_i^k} dx^k =$$

Obszar \mathcal{D}_i oraz granice całkowania $a^k(x)$, $b^k(x)$ są dobrane jak w twierdzeniu Fubiniiego, a zależność od x wskazuje na zależność granic od punktu w \mathcal{D}_i .

$$= \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \int_{\mathcal{D}_i} dx_i^1 \dots^{(\text{bez } k)} \dots dx_i^n \left(f_i(x^1, \dots, b^k(x), \dots, x^n) - f_i(x^1, \dots, a^k(x), \dots, x^n) \right)$$

Jeśli $\varphi_i(\mathcal{O}_i)$ jest otwarty w \mathbb{R}^n , wtedy wartości funkcji f_i w punktach granicznych są równe zero, gdyż nośnik f_i zawiera się w $\varphi_i(\mathcal{O}_i)$. Do całki wkładają więc tylko te układy współrzędnych, które są brzegowe, tzn. $\varphi_i(\mathcal{O}_i) \cap E \neq \emptyset$. Taki układ współrzędnych ma szczególną postać, tzn. wyróżniona jest w nim pierwsza współrzędna. Wkład do całki daje jedynie składnik z $k = 1$, gdyż w pozostałych punktach granicznych f_i także jest zero. Dla $k = 1$ granica górna całkowania $b^1(x) = 0$. W granicy dolnej także funkcja f_i znika. Całka taka ma postać

$$\int_{(\mathcal{O}_i, \nu)} d(\alpha_i \omega) = \int_{\varphi_i(\mathcal{O}_i) \cap E} f_i(0, x^2, \dots, x^n) dx^2 \dots dx^n = \int_{\bar{\varphi}_i(\bar{\mathcal{O}}_i)} f_i(0, x^2, \dots, x^n) dx^2 \dots dx^n.$$

Zgodnie z definicją całki na rozmaitości

$$\sum_{i \in I} \int_{\tilde{\varphi}_i(\tilde{\mathcal{O}}_i)} f_i(0, x^2, \dots, x^n) dx^2 \cdots dx^n = \int_{(\partial M, \partial_i)} \omega,$$

gdyż $(\tilde{\mathcal{O}}_i, \tilde{\varphi}_i)$ stanowi atlas na ∂M zgodny z orientacją a obcięcie (α_i) do brzegu jest rozkładem jedności na brzegu. \square

1.2 Klasyczne wersje Twierdzenia Stokes'a

W tej części zajmiemy się interpretacją poniższych wzorów analizy wektorowej w języku Twierdzenia Stokes'a.

$$\int_S (\vec{n} | \text{rot } X) d\sigma = \int_{\partial S} (\vec{t} | X) d\ell \quad (2)$$

$$\int_D \text{div } X dv = \int_{\partial D} (\vec{n} | X) d\sigma. \quad (3)$$

Dyskutować będziemy obiekty, które zdefiniować można na rozmaitości M wyposażonej w strukturę metryczną g , tzn. na przestrzeni stycznej w każdym punkcie dany jest iloczyn skalarny, czyli forma dwuliniowa, niezdegenerowana, symetryczna i dodatnio określona.

Przypomnijmy sobie kilka faktów algebraicznych. Niech V będzie przestrzenią wektorową skończenie-wymiarową a g iloczynem skalarnym określonym na tej przestrzeni. Iloczyn skalarny definiuje odwzorowanie

$$G : V \rightarrow V^*, \quad G(v) = g(v, \cdot).$$

Fakt, że iloczyn skalarny jest symetryczny powoduje, że odwzorowanie G jest samosprężone. Fakt, że iloczyn skalarny jest niezdegenerowany powoduje, że G jest izomorfizmem liniowym. Dodatkowym obiektem związanym z iloczynem skalarnym jest forma kwadratowa \tilde{g} , która służy do definiowania długości wektora:

$$\tilde{g}(v) = g(v, v), \quad \|v\| = \sqrt{\tilde{g}(v)}.$$

My pracować będziemy głównie z g i G . Jeśli w V wybierzemy bazę $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ iloczyn skalarny oraz odpowiedni samosprężony izomorfizm przedstawić możemy przy pomocy macierzy. Macierz formy g w bazie e oznaczamy zazwyczaj $[g]_e$. Dla wygody będziemy także używać oznaczenia \mathcal{G}_e . Będziemy także pomijać symbol bazy, jeśli będzie jasne jakiej bazy używamy. Wyrazy macierzowe \mathcal{G}_{ij} mają postać

$$\mathcal{G}_{ij} = g(e_i, e_j).$$

Zwróćmy uwagę na położenie indeksów, które, jakkolwiek *historyczne*, ma jednak uzasadnienie. Tradycyjnie indeksy przy współrzędnych wektora piszemy na górze oraz sumujemy po powtarzających się indeksach górnym i dolnym. W tej sytuacji, jeśli $v = v^i e_i$ oraz $w = w^i e_i$ to

$$g(v, w) = \mathcal{G}_{ij} v^i w^j$$

albo

$$g(v, w) = ([v]^e)^T \mathcal{G}_e [w]^e.$$

Jeśli $\varepsilon = (\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n)$ oznacza bazę dualną do e to

$$G(v) = \mathcal{G}_{ij} v^i \varepsilon^j \in V^*.$$

Zapisać też można

$$g = \mathcal{G}_{ij} \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j.$$

Zamiana bazy w macierzy formy dwuliniowej odbywa się według wzoru

$$\mathcal{G}_f = Q^T \mathcal{G}_e Q,$$

gdzie Q jest macierzą odwzorowania identycznościowego na V zapisanego w bazach f i e , dokładniej

$$Q = [id_V]^e_f.$$

Zamieniając bazę w macierzy odwzorowania używamy macierzy przejścia wzajemnie odwrotnych. Tu obkładamy wyjściową macierz macierzą przejścia i do niej transponowaną. Odzwierciedla to charakter macierzy \mathcal{G} . Jest to oczywiście także kwadratowa tabelka liczb, ale funkcjonująca inaczej niż zwykła macierz odwzorowania.

Tensor metryczny na rozmaitości zadaje powyżej opisaną strukturę punkt po punkcie na przestrzeniach stycznych i kostycznych. Mamy więc iloczyn skalarny g na każdej z przestrzeni stycznych, możemy liczyć długości wektorów stycznych oraz dysponujemy izomorfizmem samosprzężonym

$$G : TM \longrightarrow T^*M.$$

Izomorfizm ten pozwala utożsamiać wektory z kowektorami, co jest wykorzystywane w teoriach fizycznych, choć zazwyczaj pomijane milczeniem jako oczywiste. Mając do dyspozycji lokalny układ współrzędnych (\mathcal{O}, φ) , $\varphi = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ mamy także w każdym punkcie bazę przestrzeni stycznej i przestrzeni kostycznej. Możemy zatem używać macierzy związanej z tensorem metrycznym. Wyrazy macierzowe \mathcal{G}_{ij} są teraz nie liczbami a funkcjami gładkimi na M . Załóżmy teraz, że rozmaitość M jest orientowalna oraz że wybrano na niej orientację ν . Orientowalność wiąże się z istnieniem nieznikających n -form nazywanych formami objętości. Istnienie tensora metrycznego i wybranej orientacji pozwala zdefiniować w kanoniczny sposób formę objętości związaną z metryką. Jeśli układ współrzędnych jest zgodny z orientacją, to metryczna forma objętości Ω ma postać

$$\Omega = \sqrt{\det \mathcal{G}} dx^1 \wedge dx^2 \wedge \dots \wedge dx^n$$

Struktura metryczna i orientacja pozwala utożsamiać pola wektorowe i jednoformy oraz pola wektorowe i $n - 1$ formy. Jeśli X jest polem wektorowym na M , to $G \circ X$ jest jednoformą a $i_X \Omega$ jest $(n - 1)$ -formą.

Gradient: Gradient jest polem wektorowym odpowiadającym różniczce funkcji. Jeśli f jest funkcją gładką na M

$$\text{grad } f = G^{-1} \circ df.$$

Definicja ta jest niezależna od współrzędnych. Pozwala jednak w łatwy sposób zapisywać gradient w dowolnych współrzędnych bez uciążliwego zamieniania zmiennych w operatorach różniczkowych. Prawidłowa definicja gradientu pozwala także odpowiedzieć na pytanie, czy dane

pole wektorowe X jest gradientem funkcji, tzn. czy ma potencjał skalarny. Pole mające potencjał skalarny odpowiada jednoformie, która jest różniczką, zatem jej różniczka musi być zero. Warunkiem koniecznym potencjalności pola jest więc, aby

$$d(G \circ X) = 0.$$

Istnienie bądź nieistnienie potencjału zależy już dalej od kształtu obszaru, jak w Lemacie Poincarè.

Rotacja: Na trójwymiarowej zorientowanej rozmaitości z metryką zdefiniować można rotację pola wektorowego ($\text{rot } A$) następującym wzorem

$$d(G \circ A) = \iota_{\text{rot } A} \Omega.$$

Sprawdźmy, że na \mathbb{R}^3 z kanonicznym iloczynem skalarnym i kanoniczną orientacją otrzymamy znane nam już wzory na rotację pola wektorowego w kartezjańskim układzie współrzędnych. Niech

$$A = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Korzystając z faktu, że kanoniczne współrzędne w \mathbb{R}^3 są ortonormalne otrzymujemy

$$G \circ A = A_x dx + A_y dy + A_z dz.$$

Po zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$\begin{aligned} d(G \circ A) &= \frac{\partial A_x}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial A_x}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial A_y}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial A_y}{\partial z} dz \wedge dy + \frac{\partial A_z}{\partial x} dx \wedge dz + \frac{\partial A_z}{\partial y} dy \wedge dz = \\ &= \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dz \wedge dx \end{aligned}$$

Oznaczmy teraz $B = \text{rot } A$. Forma objętości w kanonicznych współrzędnych to $\Omega = dx \wedge dy \wedge dz$. Mamy zatem

$$\iota_B \Omega = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$$

i z porównania obu wzorów otrzymujemy

$$\text{rot } A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial z}$$

co zgadza się z tradycyjnym wzorem na rotację. Zaletą naszej definicji jest, że możemy teraz zapisać rotację w dowolnym układzie współrzędnych nie dokonując uciążliwej zamiany zmiennych.

Fakt 2

$$\text{rot grad } f = 0.$$

Dowód:

$$\iota_{\text{rot grad } f} \Omega = d(G \circ \text{grad } f) = d(G \circ G^{-1} \circ df) = ddf = 0.$$

Zwężenie w formę objętości jest równe zero jedynie dla pola zerowego, zatem istotnie $\text{rot grad } f = 0$. \square

Powyższy fakt wskazuje, że jedną z metod sprawdzania potencjalności pola jest obliczenie jego rotacji. Fakt, iż rotacja gradientu znika, wynika ze znikania drugiej różniczki.

Dywergencja: Na metrycznej orientowalnej rozmaitości dowolnego wymiaru zdefiniować można dywergencję pola wektorowego wzorem

$$(\text{div } X)\Omega = d(\iota_X \Omega).$$

Dywergencja nie zależy od orientacji względem której wybrana jest forma objętości Ω , gdyż pojawia się ona po obydwu stronach równania. Ewentualna zmiana znaku odbywa się jednocześnie po obu stronach równania. W kartezjańskim układzie współrzędnych łatwo jest wypisać dywergencję:

$$\begin{aligned} d(\iota_X \Omega) &= d(X_x dy \wedge dz + X_y dz \wedge dx + X_z dx \wedge dy) = \\ &= \frac{\partial X_x}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz + \frac{\partial X_y}{\partial y} dy \wedge dz \wedge dx + \frac{\partial X_z}{\partial z} dz \wedge dx \wedge dy = \\ &= \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz, \end{aligned}$$

Zatem

$$\text{div } X = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

Także i w tym przypadku bardzo łatwo jest wypisać dywergencję w innym układzie współrzędnych korzystając z definicji a nie z procedury zamiany zmiennych.

Fakt 3

$$\text{div rot } X = 0$$

Dowód:

$$(\text{div rot } X)\Omega = d(\iota_{\text{rot } X} \Omega) = d(dG \circ X) = 0$$

\square