Notatki do wykładu Geometria Różniczkowa I

Katarzyna Grabowska, KMMF

30 grudnia 2013

1 Całkowanie form różniczkowych

1.1 Klasyczne wersje Twierdzenia Stokes'a

W tej części zajmiemy się interpretacją poniższych wzorów analizy wektorowej w języku Twierdzenia Stokes'a.

$$\int_S (\vec{n}|\mathrm{rot}\, X) d\sigma = \int_{\partial S} (\vec{t}|X) d\ell \tag{1}$$

$$\int_D \mathrm{div}\, X\, dv = \int_{\partial D} (\vec{n}|X) d\sigma. \tag{2}$$

Dyskutować będziemy obiekty, które zdefiniować można na rozmaitości M wyposażonej w strukturę metryczną g, tzn. na przestrzeni stycznej w każdym punkcie dany jest iloczyn skalarny, czyli forma dwuliniowa, niezdegenerowana, symetryczna i dodatnio określona.

Przypomnijmy sobie kilka faktów algebraicznych. Niech V będzie przestrzenią wektorową skończenie-wymiarową a g iloczynem skalarnym określonym na tej przestrzeni. Iloczyn skalarny definiuje odwzorowanie

$$G : V \to V^*, \qquad G(v) = g(v, \cdot).$$

Fakt, że iloczyn skalarny jest symetryczny powoduje, że odwzorowanie G jest samosprzężone. Fakt, że iloczyn skalarny jest niezdegenerowany powoduje, że G jest izomorfizmem liniowym. Dodatkowym obiektem związanym z iloczynem skalarnym jest forma kwadratowa $\tilde{g}$, która służy do definiowania długości wektora:

$$\tilde{g}(v) = g(v, v), \quad \|v\| = \sqrt{\tilde{g}(v)}.$$

My pracować będziemy gównie z g i G. Jeśli w V wybierzemy bazę $e = (e_1, e_2, \dots e_n)$ iloczyn skalarny oraz odpowiedni samosprzężony izomorfizm przedstawić możemy przy pomocy macierzy. Macierz formy g w bazie e oznaczamy zazwyczaj $[g]_e$. Dla wygody będziemy także używać oznaczenia $\mathcal{G}_e$. Będziemy także pomijać symbol bazy, jeśli będzie jasne jakiej bazy używamy. Wyrazy macierzowe $\mathcal{G}_{ij}$ mają postać

$$\mathcal{G}_{ij} = g(e_i, e_j).$$

Zwróćmy uwagę na położenie indeksów, które, jakkolwiek *historyczne*, ma jednak uzasadnienie. Tradycyjnie indeksy przy współrzędnych wektora piszemy na górze oraz sumujemy po powtarzających się indeksach górnym i dolnym. W tej sytuacji, jeśli $v = v^i e_i$ oraz $w = w^i e_i$ to

$$g(v, w) = \mathcal{G}_{ij} v^i w^j$$

albo

$$g(v,w) = \left([v]^e\right)^T \mathcal{G}_e [w]^e.$$

Jeśli $\varepsilon = (\varepsilon^1, \ldots, \varepsilon^n)$ oznacza bazę dualną do e to

$$G(v) = \mathcal{G}_{ij} v^i \varepsilon^j \in V^*.$$

Zapisać też można

$$g = \mathcal{G}_{ij} \varepsilon^i \otimes \varepsilon^j.$$

Zamiana bazy w macierzy formy dwuliniowej odbywa się według wzoru

$$\mathcal{G}_f = Q^T \mathcal{G}_e Q,$$

gdzie Q jest macierzą odwzorowania identycznościowego na V zapisanego w bazach f i e, dokładniej

$$Q = [id_V]^e{}_f.$$

Zamieniając bazę w macierzy odwzorowania używamy macierzy przejścia wzajemnie odwrotnych. Tu obkładamy wyjściową macierz macierzą przejścia i do niej transponowaną. Odzwierciedla to charakter macierzy $\mathcal{G}$. Jest to oczywiście także kwadratowa tabelka liczb, ale funkcjonująca inaczej niż zwykła macierz odwzorowania.

Tensor metryczny na rozmaitości zadaje powyżej opisaną strukturę punkt po punkcie na przestrzeniach stycznych i kostycznych. Mamy więc iloczyn skalarny g na każdej z przestrzeni stycznych, możemy liczyć długości wektorów stycznych oraz dysponujemy izomorfizmem samosprzężonym

$$G : \mathsf{T}M \longrightarrow \mathsf{T}^*M.$$

Izomorfizm ten pozwala utożsamiać wektory z kowektorami, co jest wykorzystywane w teoriach fizycznych, choć zazwyczaj pomijane milczeniem jako oczywiste. Mając do dyspozycji lokalny układ współrzędnych $(\mathcal{O}, \varphi)$, $\varphi = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$ mamy także w każdym punkcie bazę przestrzeni stycznej i przestrzeni kostycznej. Możemy zatem używać macierzy związanej z tensorem metrycznym. Wyrazy macierzowe $\mathcal{G}_{ij}$ są teraz nie liczbami a funkcjami gładkimi na M. Załóżmy teraz, że rozmaitość M jest orientowalna oraz że wybrano na niej orientację $\imath$. Orientowalność wiąże się z istnieniem nieznikających n-form nazywanych formami objetości. Istnienie tensora metrycznego i wybranej orientacji pozwala zdefiniować w kanoniczny sposób formę objetości związaną z metryką. Jeśli układ współrzędnych jest zgodny z orientacją, to metryczna forma objętości Ω ma postać

$$\Omega = \sqrt{\det \mathcal{G}}\, \mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n$$

Struktura metryczna i orientacja pozwala utożsamiać pola wektorowe i jednoformy oraz pola wektorowe i $n-1$ formy. Jeśli X jest polem wektorowym na M, to $G \circ X$ jest jednoformą a $i_X\Omega$ jest $(n-1)$-formą.

Gradient: Gradient jest polem wektorowym odpowiadającym różniczce funkcji. Jeśli f jest funkcją gładką na M

$$\operatorname{grad} f = G^{-1} \circ \mathsf{d}f.$$

Definicja ta jest niezależna od współrzędnych. Pozwala jednak w łatwy sposób zapisywać gradient w dowolnych współrzędnych bez uciążliwego zamieniania zmiennych w operatorach różniczkowych. Prawidłowa definicja gradientu pozwala także odpowiedzieć na pytanie, *czy dane* *pole wektorowe X jest gradientem funkcji, tzn. czy ma potencjał sklarny.* Pole mające potencjał skalarny odpowiada jednoformie, która jest różniczką, zatem jej rózniczka musi być zero. Warunkiem koniecznym potencjalności pola jest więc, aby

$$\mathsf{d}(G \circ X) = 0.$$

Istnienie bądź nieistnienie potencjału zależy już dalej od kształtu obszaru, jak w Lemacie Poincarè.

Rotacja: Na trójwymiarowej zorientowanej rozmaitości z metryką zdefiniować można rotację pola wektorowego ($\operatorname{rot} A$) następującym wzorem

$$\mathsf{d}(G \circ A) = \imath_{\operatorname{rot} A}\Omega.$$

Sprawdźmy, że na $\mathbb{R}^3$ z kanonicznym iloczynem skalarnym i kanoniczną orientacją otrzymamy znane nam już wzory na rotację pola wektorowego w kartezjańskim układzie współrzędnych. Niech

$$A = A_x\frac{\partial}{\partial x} + A_y\frac{\partial}{\partial y} + A_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

Korzystając z faktu, że kanoniczne współrzędne w $\mathbb{R}^3$ są ortonormalne otrzymujemy

$$G \circ A = A_x\mathsf{d}x + A_y\mathsf{d}y + A_z\mathsf{d}x.$$

Po zróżniczkowaniu otrzymujemy

$$\mathsf{d}(G\circ A) = \frac{\partial A_x}{\partial y}\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}x + \frac{\partial A_x}{\partial z}\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x + \frac{\partial A_y}{\partial x}\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y + \frac{\partial A_y}{\partial z}\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}y + \frac{\partial A_z}{\partial x}\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}z + \frac{\partial A_z}{\partial y}\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z =$$
$$\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y + \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x$$

Oznaczmy teraz $B = \operatorname{rot} A$. Forma objetości w kanonicznych współrzędnych to $\Omega = \mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z$. Mamy zatem

$$\imath_B\Omega = B_x\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z + B_y\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x + B_z\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y$$

i z porównania obu wzorów otrzymujemy

$$\operatorname{rot} A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial z}$$

co zgadza się z tradycyjnym wzorem na rotację. Zaletą naszej definicji jest, że możemy teraz zapisać rotację w dowolnym układzie współrzędnych nie dokonując uciążliwej zamiany zmiennych.

Fakt 1

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0.$$

Dowód:

$$\imath_{\operatorname{rot}\operatorname{grad} f}\Omega = \mathsf{d}(G\circ\operatorname{grad} f) = \mathsf{d}(G\circ G^{-1}\circ\mathsf{d}f) = \mathsf{dd}f = 0.$$

Zwężenie w formą objętości jest równe zero jedynie dla pola zerowego, zatem istotnie

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0.$$

□

Powyższy fakt wskazuje, że jedną z metod sprawdzania potencjalności pola jest obliczenie jego rotacji. Fakt, iż rotacja gradientu znika, wynika ze znikania drugiej różniczki.

Dywergencja: Na metrycznej orientowalnej rozmaitości dowolnego wymiaru zdefiniować można dywergencję pola wektorowego wzorem

$$(\operatorname{div} X)\Omega = \mathsf{d}(\imath_X \Omega).$$

Dywergencja nie zależy od orientacji względem której wybrana jest forma objętości Ω, gdyż pojawia się ona po obydwu stronach równania. Ewentualna zmiana znaku odbywa się jednocześnie po obu stronach równania. W kartezjańskim układzie współrzędnych łatwo jest wypisać dywergencję:

$$\begin{aligned}\mathsf{d}(\imath_X \Omega) = \mathsf{d}(X_x \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + X_y \mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + X_z \mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y) = \\ \frac{\partial X_x}{\partial x}\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + \frac{\partial X_y}{\partial y}\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + \frac{\partial X_z}{\partial z}\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y = \\ \left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right)\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z,\end{aligned}$$

Zatem

$$\operatorname{div} X = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

Także i w tym przypadku bardzo łatwo jest wypisać dywergencję w innym układzie współrzędnych korzystając z definicji a nie z procedury zamiany zmiennych.

Fakt 2

$$\operatorname{div}\operatorname{rot} X = 0$$

Dowód:

$$(\operatorname{div}\operatorname{rot} X)\Omega = \mathsf{d}(\imath_{\operatorname{rot} X}\Omega) = \mathsf{d}(\mathsf{d}G \circ X)) = 0$$

□

Analizując wzory używać (1, 2) powinniśmy raczej pojęcia gęstości, która odpowiada tradycyjnemu "elementowi objętości" dv, „elementowi powierzchni" $d\sigma$ czy „elementowi długości" $d\ell$. Nie dyskutowaliśmy jednak form nieparzystych oraz gęstości, dlatego posłużymy się dotychczas wprowadzonym językiem. Na potrzeby wzoru (1) założyć trzeba, że S jest dwuwymiarową zwartą powierzchnią z brzegiem zanurzoną w trójwymiarowej zorientowanej rozmaitości M z metryką. Na potrzeby wzoru (2) założyć należy, że D jest n-wymiarową zwartą rozmaitością z brzegiem zanurzoną w n-wymiarowej zorientowanej rozmaitości M. Zajmiemy się najpierw wzorem (2). W naszym języku „element objętości" to forma objętości zgodna z orientacją i związana z metryką, zatem napisać możemy

$$\int_D \operatorname{div} X\, dv = \int_{(D,\imath)} (\operatorname{div} X)\Omega =$$

i dalej idzie samo

$$= \int_{(D,\imath)} \mathsf{d}(\imath_X \Omega) = \int_{(\partial D, \partial\imath)} \imath_X \Omega =$$

Korzystając z układów współrzędnych typu opisanego w definicji rozmaitości z brzegiem oraz ze stosownego rozkładu jedności napisać można ciąg dalszy rachunku w postaci

$$= \sum_{i \in I} \int_{(\tilde{\mathcal{O}}_i, +)} X_i^1 \sqrt{\det \mathcal{G}_i}\, \mathsf{d}x_i^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x_i^n.$$

W powyższym wzorze całkujemy po dziedzinie układu współrzędnych $\tilde{\varphi}_i = (x_i^2, \ldots, x_i^n)$ na brzegu z orientacją zgodną z kolejnością współrzędnych $(x^2, \ldots, x^n)$. X_i^1 jest pierwszą współrzędną pola wektorowego w układzie współrzędnych $\varphi = (x_i^1, x_i^2, \ldots, x_i^n)$ zaś $\mathcal{G}_i$ to macierz iloczynu skalarnego wyrażona w bazie związanej z układem współrzędnych. Po prawej stronie równości (2) $d\sigma$ odpowiada formie objętości na brzegu zapisanej dla metryki g obciętej do brzegu. W układzie współrzędnych $\tilde{\varphi}$ forma ta ma postać $\sqrt{\det \mathcal{S}_i}\, \mathsf{d}x_i^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x_i^n$. Macierz $\mathcal{S}_i$ jest podmacierzą macierzy $\mathcal{G}_i$ odpowiadającą współrzędnym od 2 wzwyż, tzn

$$\mathcal{G}_i = \left[\begin{array}{c|ccc} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} & \cdots & \mathcal{G}_{1n} \\ \hline \mathcal{G}_{12} & & & \\ \vdots & & \mathcal{S}_i & \\ \mathcal{G}_{1n} & & & \end{array}\right]$$

Poszukajmy teraz wektora normalnego do powierzchni ∂D skierowanego „na zewnątrz”. Niech $\vec{n} = \alpha^i \partial_i$. Pomijać będziemy indeks numerujący układy współrzędnych. Warunek „skierowania na zewnątrz” oznacza, że $\alpha^1 > 0$. Wektor $\vec{n}$ ma być prostopadły do ∂_j dla $j > 1$, czyli

$$0 = g(\vec{n}, \partial_j) = \mathcal{G}_{ik} \alpha^i \delta_j^k = \mathcal{G}_{ij} \alpha^i \quad j > 1. \tag{3}$$

Jednocześnie wektor $\vec{n}$ ma być długości 1, czyli

$$1 = g(\vec{n}, \vec{n}) = \mathcal{G}_{ij} \alpha^i \alpha^j = \sum_j \left(\sum_i \mathcal{G}_{ij} \alpha^i \alpha^j\right) = \sum_i \mathcal{G}_{i1} \alpha^i \alpha^1. \tag{4}$$

Wyrażenia (3) i (4) można razem zapisać macierzowo

$$\begin{bmatrix} \mathcal{G}_{11} & \mathcal{G}_{12} & \cdots & \mathcal{G}_{1n} \\ \mathcal{G}_{21} & \mathcal{G}_{22} & \cdots & \mathcal{G}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{G}_{n1} & \mathcal{G}_{n2} & \cdots & \mathcal{G}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\alpha^1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Macierz $\mathcal{G}$ jest odwracalna. Wyrazy macierzowe macierzy odwrotnej oznaczamy tradycyjnie $\mathcal{G}^{ij}$. Używając macierzy odwrotnej rozwiążemy równanie (5).

$$\alpha^1 = \mathcal{G}^{1j} \delta_j^1 / \alpha^1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha^1 = \sqrt{\mathcal{G}^{11}}.$$

$$\alpha^j = \mathcal{G}^{jk} \delta_k^1 / \alpha^1 \quad \Longrightarrow \quad \alpha^j = \mathcal{G}^{j1} / \sqrt{\mathcal{G}^{11}}, \quad j > 1$$

Obliczmy teraz $g(\vec{n}, X)$

$$g(\vec{n}, X) = \mathcal{G}_{ij} \alpha^i X^j = \mathcal{G}_{i1} \alpha^i X^1 = \mathcal{G}_{i1} \mathcal{G}^{i1} / \sqrt{\mathcal{G}^{11}} X^1 = X^1 / \sqrt{\mathcal{G}^{11}}.$$

Po prawej stronie wzoru (2) we współrzędnych mamy więc

$$\int_{(\tilde{\mathcal{O}},+)} (X^1/\sqrt{\mathcal{G}^{11}})\sqrt{\det \mathcal{S}}\, \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n. \tag{6}$$

Potrzebujemy związek między $\det \mathcal{G}$ a $\det \mathcal{S}$. W tym celu rozważmy przejście od bazy $e = (\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$ do bazy $f = (\vec{n}, \partial_2, \ldots, \partial_n)$. Macierz przejścia $[id]^e_f$ ma postać

$$[id]^e_f = \begin{bmatrix} \alpha^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha^2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha^3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Macierz iloczynu skalarnego w bazie f to

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathcal{S} & \\ 0 & & & \end{array}\right],$$

a operacja zmiany bazy daje

$$\left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & \mathcal{S} & \\ 0 & & & \end{array}\right] = \begin{bmatrix} \alpha^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha^2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha^3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T \mathcal{G} \begin{bmatrix} \alpha^1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha^2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha^3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha^n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Liczymy wyznacznik

$$\det \mathcal{S} = (\alpha^1)^2 \det \mathcal{G}$$

i pierwiastek

$$\sqrt{\det \mathcal{S}} = \alpha^1 \sqrt{\det \mathcal{G}}$$

ale $\alpha^1 = \sqrt{\mathcal{G}^{11}}$, zatem

$$\sqrt{\det \mathcal{S}} = \sqrt{\mathcal{G}^{11}}\sqrt{\det \mathcal{G}}$$

Po podstawieniu powyższego związku do (6) prawa strona (2) przyjmuje postać

$$\int_{(\tilde{\mathcal{O}},+)} (X^1/\sqrt{\mathcal{G}^{11}})\sqrt{\det \mathcal{S}}\, \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n =$$
$$\int_{(\tilde{\mathcal{O}},+)} (X^1/\sqrt{\mathcal{G}^{11}})\sqrt{\mathcal{G}^{11}}\sqrt{\det \mathcal{G}}\, \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n =$$
$$\int_{(\tilde{\mathcal{O}},+)} X^1 \sqrt{\det \mathcal{G}}\, \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n$$

i jest równa lewej stronie.

Zajmiemy się teraz wzorem (1). Analizując (2) ustaliliśmy, że całka

$$\int_{\partial D} (\vec{n}|X) d\sigma = \int_{\partial D} \imath_X \Omega.$$

Skorzystamy z tego przekształcając lewą stronę (1):

$$\int_S (\vec{n}|\mathrm{rot}\, X) d\sigma = \int_S \imath_{\mathrm{rot}\, X} \Omega = \int_S \mathsf{d}(G \circ X) = \int_{\partial S} G \circ X. \tag{7}$$

Zapiszmy teraz formę pod całką w układzie współrzędnych

$$G \circ X = \mathcal{G}_{ij} X^i \mathsf{d}x^j$$

Jeśli

$$I \ni r \mapsto \Big(x^1(r), x^2(r), x^3(r)\Big) \in \partial S$$

jest parametryzacją brzegu ∂S to

$$\int_{\partial S} G \circ X = \int_I \mathcal{G}_{ij}(r) X^i(r) \dot{x}^j \mathsf{d}r$$

Jednostkowy wektor styczny to

$$\vec{t} = \frac{1}{\|\partial r\|} \partial_r$$

natomiast

$$\partial_r = \dot{x}^1 \partial_1 + \dot{x}^2 \partial_2 + \dot{x}^3 \partial_3.$$

Iloczyn skalarny pod całką można zapisać jako

$$\mathcal{G}_{ij} X^i \dot{x}^j = g(X, \partial r) = g(X, \vec{t}) \|\partial_r\|.$$

Jeśli weźmiemy pod uwagę, że

$$d\ell = \|\partial_r\| \mathsf{d}r$$

rachunek (7) można kontynuować

$$\int_{\partial S} G \circ X = \int_I \mathcal{G}_{ij} X^i \dot{x}^j \mathsf{d}r = \int_I (X|\vec{t}) \|\partial_r\| \mathsf{d}r \int_{\partial S} (X|\vec{t}) d\ell.$$

□

1.2 Wieloformy, wielowektory, Gwiazdka Hodge'a

Materiał zawarty w tym podrozdziale omówiony zostanie na ćwiczeniach.

W bardzo podobny sposób do tego, w jaki definiowaliśmy wieloformy na przestrzeni wektorowej, zdefiniować można wielowektory. Skorzystamy tu z prawdziwego dla skończenie-wymiarowych przestrzeni wektorowych faktu iż $(V^*)^*$ jest kanonicznie izomorficzna z V. Możemy zamienić rolami V i V^* traktując V jako zbiór funkcji liniowych na V^* i rozważać także zbiór funkcji wieloliniowych antysymetrycznych na V^*, czyli $\bigwedge^k V$. Swój odpowiednik wektorowy ma też konstrukcja iloczynu zewnętrznego. W języku tensorowym mamy

$$v \wedge w = w \otimes w - w \otimes v$$

oraz

$$v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k = \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma v_{\sigma(1)} \otimes v_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(k)}.$$

Ponieważ $(V \otimes V)^* \simeq V^* \otimes V^*$ możemy obliczyć $\alpha \wedge \beta$ na $v \wedge w$:

$$\langle \alpha \wedge \beta, v \wedge w \rangle = \langle \alpha \otimes \beta - \beta \otimes \alpha, v \otimes w - w \otimes v \rangle =$$
$$\alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v) - \beta(v)\alpha(w) + \beta(w)\alpha(v) = 2[\alpha(v)\beta(w) - \alpha(w)\beta(v)]$$

i ogólnie

$$\langle \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^k, v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n \rangle = k! \sum_{\sigma \in S_k} \operatorname{sgn} \sigma\, \alpha^1(v_{\sigma(1)}) \cdots \alpha^k(v_{\sigma(k)}).$$

Oznacza to, że jeśli e i ϵ są parą baz dualnych w V i V^* to układy $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}$, $\epsilon^{j_1} \wedge \epsilon^{j_2} \wedge \cdots \wedge \epsilon^{j_k}$ dla $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, $j_1 < j_2 < \cdots < j_k$ nie są parą baz dualnych. Gdzieś trzeba podzielić przez $k!$. Mając iloczyn skalarny g na V możemy utożsamiać wektory z kowektorami przy pomocy izomorfizmu G. Iloczyn skalarny możemy wprowadzić także na V^*:

$$g(v, w) = (v|w) = \langle G(v), w \rangle = \mathcal{G}_{ij} v^i v^j \qquad \tilde{g}(\alpha, \beta) = (\alpha|\beta) = \langle \alpha, G^{-1}(\beta) \rangle = \mathcal{G}^{ij} \alpha_i \beta_j$$

Zgodnie z konwencją, $\mathcal{G}^{ij}$ to wyrazy macierzowe macierzy odwrotnej do $\mathcal{G}$. Izomorfizmy G i G^{-1} możemy rozszerzyć na dowolne iloczyny tensorowe. Na przykład jeśli $\alpha \otimes \beta \in V^* \otimes V^*$ to $G^{-1}(\alpha \otimes \beta) = G^{-1}(\alpha) \otimes G^{-1}(\beta) \in V \otimes V$. Zakładając, że rozszerzenie jest liniowe otrzymujemy

$$G^{-1}(\alpha_{i_1 i_2} \ldots i_k \epsilon^{i_1} \otimes \epsilon^{i_2} \otimes \cdots \otimes \epsilon^{i_k}) = \alpha_{i_1 i_2} \mathcal{G}^{i_1 j_1} \mathcal{G}^{i_2 j_2} \cdots \mathcal{G}^{i_k j_k} e_{j_1} \otimes e_{j_2} \otimes \cdots \otimes e_{j_k}.$$

Korzystając z rozszerzenia G i G^{-1} definiujemy iloczyn skalarny na przestrzeni k-form $\bigwedge^k V^*$ wzorem

$$(\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \cdots \wedge \alpha^k \,|\, \beta^1 \wedge \beta^2 \wedge \cdots \wedge \beta^k) = \frac{1}{k!} \langle G^{-1}(\alpha^1) \wedge G^{-1}(\alpha^2) \wedge \cdots \wedge G^{-1}(\alpha^k), \beta^1 \wedge \beta^2 \wedge \cdots \wedge \beta^k \rangle,$$

na dowolne wieloformy (niekoniecznie proste) rozszerzamy poprzez warunek liniowości.

Gwiazdka Hodge'a: Na rozmaitości M z metryką g mamy iloczyn skalarny na każdej przestrzeni stycznej, zatem wszystko o czym była mowa prawdziwe jest punkt po punkcie. Jeśli dodatkowo rozmaitość jest zorientowana i w związku z tym wyposażona w kanoniczną formę objętości zdefiniować można przydatne odwzorowanie

$$* : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{n-k}(M)$$

wzorem

$$*\alpha = \frac{1}{k!} \imath_{G^{-1}(\alpha)} \Omega.$$

Mamy tu do czynienia z pewną kolizją oznaczeń: Ω^k oznacza zbiór k-form ma M i jednocześnie Ω jest formą objetości. Myślę jednak, że damy radę odróżniać o którą „omegę” kiedy chodzi.

Sprawdźmy najpierw jak nasza definicja działa w praktyce. Zaczniemy od najprostszego przypadku: $M = \mathbb{R}^3$, orientacja kanoniczna, iloczyn skalarny kanoniczny, $\mathcal{G} = \mathbf{1}$, $\Omega = \mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^3$.

$$*\mathsf{d}x^1 = \imath_{G^{-1}(\mathsf{d}x^1)}\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^3 = \imath_{\partial_1}\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^3 = \mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^3$$

$$*\mathsf{d}x^2 = \imath_{G^{-1}(\mathsf{d}x^2)}\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^3 = \imath_{\partial_2}\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^3 = -\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^3$$

$$*\mathsf{d}x^3 = \imath_{G^{-1}(\mathsf{d}x^3)}\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^3 = \imath_{\partial_3}\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^3 = \mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2$$

$$*(\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2) = \tfrac{1}{2}\imath_{G^{-1}(\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2)}\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^3 = \imath_{\partial_1 \wedge \partial_2}\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^3 = \tfrac{1}{2} \cdot 2 \cdot \mathsf{d}x^3$$

Popatrzmy teraz na rachunki w układzie sferycznym:

$$\Omega = r^2 \sin\vartheta\, \mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\vartheta \wedge \mathsf{d}\varphi, \quad \mathcal{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\vartheta \end{bmatrix}.$$

$$*\mathsf{d}r = \imath_{\partial_r}\Omega = r^2 \sin\vartheta\, \mathsf{d}\vartheta \wedge \mathsf{d}\varphi$$

$$*\mathsf{d}\vartheta = \imath_{\frac{1}{r^2}\partial_r}\Omega = \tfrac{1}{r^2}\imath_{\partial_\vartheta}\Omega = -\sin\vartheta \mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi$$

$$*\mathsf{d}\varphi = \tfrac{1}{r^2 \sin^2\vartheta}\imath_{\partial_\varphi}\Omega = \tfrac{1}{\sin\vartheta}\mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\vartheta$$

$$*\mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\vartheta = \tfrac{1}{2}\tfrac{1}{r^2}\imath_{\partial_r \wedge \partial_\vartheta}\Omega = \sin\vartheta \mathsf{d}\varphi$$

Zauważmy, że

$$**\,\mathsf{d}x^1 = *\mathsf{d}x^2 \wedge \mathsf{d}x^3 = \mathsf{d}x^1, \qquad **\,\mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi = *\left(-\frac{1}{\sin\vartheta}\mathsf{d}\vartheta\right) = \mathsf{d}r \wedge \mathsf{d}\varphi$$

Z drugiej strony na $\mathbb{R}^2$

$$*\mathsf{d}x^1 = \mathsf{d}x^2, \quad *\mathsf{d}x^2 = -\mathsf{d}x^1, \quad **\,\mathsf{d}x^1 = *\mathsf{d}x^2 = -\mathsf{d}x^1.$$

Wydaje się więc, że złożenie $**$ jest równe identyczności z dokładnością do znaku. Znak ten musi mieć coś wspólnego z rzędem formy i wymiarem przestrzeni.

Fakt 3 *Zachodzą następujące równości*

1. $*1 = \Omega$
2. $*\Omega = 1$
3. $**\,\alpha = (-1)^{k(n-k)}\alpha, \quad \alpha \in \Omega^k(M)$
4. $\alpha \wedge *\beta = (\alpha|\beta)\Omega \quad \alpha, \beta \in \Omega^k(M)$

Dowód: Zauważmy, że $*$ jest operacją punktową, zatem można wybrać wygodny układ współrzędnych. W tym przypadku jest to taki układ współrzędnych, dla którego w ustalonym punkcie baza $(\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_n)$ jest ortonormalna. Pracować będziemy w takim układzie współrzędnych.

Wtedy $G^{-1}(\mathsf{d}x^i) = \partial_i$. Zaczynamy od dowodu punktu (3). Każda k-forma jest kombinacją liniową form bazowych $\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}$ z funkcyjnymi współczynnikami. $*$ jest liniowa nad funkcjami, więc można sprawdzić tylko na formach bazowych. Załóżmy, że $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$

$$*\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} = \frac{1}{k!}\imath_{\partial_{i_1}\wedge\partial_{i_2}\wedge\cdots\wedge\partial_{i_k}}\mathsf{d}x^1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n = \operatorname{sgn}\sigma\, \mathsf{d}x^{i_{k+1}} \wedge \mathsf{d}x^{i_{k+2}} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_n},$$

gdzie $i_{k+1} < i_{k+2} < \cdots < i_n$ oraz σ jest permutacją

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix}.$$

Aplikujemy $*$ drugi raz

$$* *\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} = *\operatorname{sgn}\sigma\, \mathsf{d}x^{i_{k+1}} \wedge \mathsf{d}x^{i_{k+2}} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_n} =$$
$$\operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\rho\, \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}.$$

Permutacja ρ ma postać

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-k & n-k+1 & \cdots & n \\ i_{k+1} & i_{k+2} & \cdots & i_n & i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix}.$$

Pozostaje do obliczenia $\operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\rho$: Pamiętając, że znak jest homomorfizmem grupy permutacji w grupę $\{-1, 1\}$ z mnożeniem zauważamy, że

$$\operatorname{sgn}\sigma \operatorname{sgn}\rho = \operatorname{sgn}\rho \operatorname{sgn}\sigma = \operatorname{sgn}\rho \operatorname{sgn}\sigma^{-1} = \operatorname{sgn}(\rho \circ \sigma^{-1})$$

Ostatnie złożenie jest permutacją

$$\rho \circ \sigma^{-1} = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{k-n} & i_{k-n+1} & \cdots & n \\ i_{k+1} & i_{k+2} & \cdots & i_n & i_1 & \cdots & i_k \end{pmatrix},$$

której znak jest równy $(-1)^{k(n-k)}$. Dla dowodu punktu (2) zauważmy, że $G^{-1}(\Omega) = \partial_1 \wedge \partial_2 \wedge \cdots \wedge \partial_n$, dalej

$$*\Omega = \frac{1}{n!}\imath(\partial_1 \wedge \partial_2 \wedge \cdots \wedge \partial_n)\Omega = \frac{1}{n!}n! = 1$$

Punkt (1) wynika z (3) i (2), a właściwie jest jedyną sensowną definicją gwiazdki zero-formy, która pasuje do pozostałych wzorów. W punkcie (4) zauważmy, że obie strony są dwuliniowe, można więc sprawdzać na formach bazowych. Niech więc $\alpha = \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}$ i $\beta = \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_k}$. Forma $*\beta$ jest, z dokładnością do znaku, iloczynem zewnętrznym różniczek $\mathsf{d}x^{j_{k+1}} \wedge \mathsf{d}x^{j_{k+2}} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_n}$, gdzie $\{j_1, j_2, \ldots, j_k, j_{k+1}, \ldots, j_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$. W tej sytuacji $\alpha \wedge *\beta$ jest różna od zera jedynie gdy $\{i_1, \ldots, i_k\} = \{j_1, \ldots, j_k\}$. Jeśli dodatkowo założymy naturalne uporządkowanie indeksów oznacza to, że $i_l = j_l$ dla $l = 1, \ldots, k$ and $\alpha = \beta$. Podobnie $(\alpha \,|\, \beta)$ jest różna od zera jedynie gdy $\alpha = \beta$, gdyż

$$(\alpha \,|\, \beta) = \frac{1}{k!}\imath_{\partial_{i_1}\wedge\cdots\wedge\partial_{i_k}}\mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_k}$$

Ostatecznie, gdy $\alpha = \beta$ prawa strona to

$$(\alpha \,|\, \alpha)\Omega = \Omega$$

a lewa

$$\alpha \wedge *\alpha = \operatorname{sgn}\sigma \, \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} \wedge \mathsf{d}x^{i_{k+1}} \wedge \mathsf{d}x^{i_{k+2}} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_n} = (\operatorname{sgn}\sigma)^2\Omega.$$

Dla porządku zapiszmy, że σ jet permutacją

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & k & k+1 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_k & i_{k+1} & \cdots & i_n \end{pmatrix}.$$

□