Notatki do wykładu Geometria Różniczkowa I

Katarzyna Grabowska, KMMF

30 grudnia 2013

1 Różniczkowanie pól i form

1.1 Pochodna Liego

W geometrii różniczkowej interesuje nas często jak dane pole tensorowe zmienia się od punktu do punktu na rozmaitości. A właściwie częściej chodzi o to, czy są jakieś kierunki w których się nie zmienia. Tu jednak napotykamy na pierwszą pojęciową trudność: zazwyczaj nie wiadomo jak porównywać rozmaite pola (pola wektorowe, formy różniczkowe...) między punktami na rozmaitości. Możemy porównywać wartości funkcji w różnych punktach, ale nie możemy porównywać wartości pola wektorowego w różnych punktach. Wiadomo co to znaczy „funkcja f jest stała na M”, ale nie wiadomo co to jest stałe pole wektorowe. Na przykład na sferze dwuwymiarowej we współrzędnych (ϑ, φ) pole wektorowe $X = \partial_\varphi$ bylibyśmy być może skłonni uznać za stałe, ale to samo pole wektorowe we współrzędnych stereograficznych wygląda już zupełnie inaczej $\partial_\varphi = -x\partial_y + y\partial_x$ i pomysł z nazwaniem go stałym polem wydaje się cokolwiek dziwny. Różnica polega na tym, że wiązka $M \times \mathbb{R} \to M$, której cięciem jest funkcja jest trywialna i wartości funkcji w rożnych punktach należą do tej samej przestrzeni. Wiązka, której cięciem jest pole wektorowe $\tau_M : \mathsf{T}M \to M$ już trywialna nie jest: wartości w różnych punktach należą do różnych przestrzeni stycznych. Przestrzenie te są co prawda izomorficzne, ale nie kanonicznie. Żeby porównywać wartości pola wektorowego w różnych punktach potrzebujemy albo dodatkowej struktury (która nazywa się, zgodnie z tym do czego służy, *powiązaniem* lub z łaciny *koneksją*) albo jakiejś metody na sprowadzanie wartości z otoczenia do jednego punktu. Dzisiaj będziemy mówili raczej o tym drugim sposobie. Do sprowadzania wartości pól wektorowych albo kowektorowych do jednego punktu posłuży nam potok pola wektorowego. Cała więc operacja badania zmienności różnych pól tensorowych, czyli obliczania pochodnych tych pól, odbywać się będzie wzdłuż ustalonego pola wektorowego.

Podstawowym pojęciem potrzebnym do zdefiniowania pochodnej Liego jest *potok pola wektorowego.* Odwzorowanie różniczkowalne $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$ nazywamy *grupą dyfeomorfizmów*, jeżeli spełnione są dwa warunki

1. $\forall q \in M \quad \varphi(0, q) = q$,
2. $\forall q \in M, s, t, \in \mathbb{R} \quad \varphi(s + t, q) = \varphi(s, \varphi(t, q))$.

Będziemy używać także oznaczenia φ_t dla odwzorowania $q \mapsto \varphi(t, q)$. Powyższe warunki oznaczają, że $\varphi_0 = \mathrm{id}_M$, $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$. Z warunku drugiego wynika, że każde odwzorowanie φ_t

jest dyfeomorfizmem, gdyż odwrotne istnieje (jest równe φ_{-t}) i jako odwzorowanie z tej samej rodziny jest różniczkowalne. Grupa dyfeomorfizmów definiuje pole wektorowe na M wzorem

$$X^{\varphi}(q) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}_{|t=0}\varphi(t,q).$$

Ze względu na warunek (2) pole to jest niezmiennicze ze względu na φ_t. Istotnie, wektor $\mathsf{T}\varphi_t(X(q))$ jest wektorem stycznym do krzywej $s \mapsto \varphi_t(\varphi_s(q)) = \varphi_{t+s}(q) = \varphi_s(\varphi_t(q)) = X(\varphi_t(q))$. W kontekście całkowania pól wektorowych mówimy zazwyczaj o *lokalnej grupie dyfeomorfizmów*. Jest to odwzorowanie $\varphi : \Omega \to M$, gdzie Ω jest otwartym podzbiorem w $\mathbb{R} \times M$ zawierającym podzbiór $\{0\} \times M$. Warunek (1) pozostaje bez zmian, a warunek (2) ma być spełniony jeśli tylko (t,q), $(s,\varphi(t,q))$ i $(s+t,q)$ są elementami Ω. Oczywiście lokalna grupa dyfeomorfizmów także definiuje pole wektorowe: żeby mieć wektor styczny wystarczy „króciutka" krzywa z parametrem w otoczeniu zera. Okazuje się, że jest też odwrotnie, tzn. każde pole wektorowe definiuje lokalną grupę dyfeomorfizmów:

Twierdzenie 1 *Gładkie pole wektorowe X na M definiuje lokalną jednoparametrową grupę dyfeomorfizmów φ^X taką, że*

$$X(q) = \frac{d}{dt}_{|t=0}\varphi^X(t,q). \tag{1}$$

Dowód: Dowód oparty jest na twierdzeniu Cauchy'ego o istnieniu i jednoznaczności wraz z twierdzeniem o zależności rozwiązania od warunków początkowych. W układzie współrzędnych nasze równanie różniczkowe ma postać

$$X^i(x^j(t)) = \frac{\mathsf{d}x^i}{\mathsf{d}t}$$

Jest to układ równań różniczkowych na $\mathbb{R}^n$. Z Twierdzenia Cauchy'ego wynika zatem istnienie krzywej całkowej $t \mapsto \varphi_t(q)$ określonej na pewnym otoczeniu I zera w $\mathbb{R}$ z warunkiem początkowym $\varphi_0(q) = q$. Z jednoznaczności rozwiązania wynika także, że jeśli tylko wszystkie napisy mają sens to $\varphi_t(\varphi_s(q)) = \varphi_{t+s}(q)$. Z twierdzenia o zależności rozwiązania od warunków początkowych wynika, że dla każdego punktu $q \in M$ istnieje otoczenie $\mathcal{O}_q \subset M$ oraz odcinek zawierający $I_q \subset \mathbb{R}$ zawierający 0 taki, że rozwiązanie z warunkiem początkowym $(s,p) \in I_q \times \mathcal{O}_q$ istnieje dla czasu z odcinka $[s-\epsilon, s+\epsilon]$ oraz ϵ jest niezależny od (s,p). Oznacza to, że Ω na którym określona jest jednoparametrowa grupa dyfeomorfizmów może być wzięte jako $\Omega = \bigcup_{q\in M}(I_q \times \mathcal{O}_q)$.$\Box$

Niech teraz X będzie polem wektorowym, a φ odpowiadającą mu lokalną grupą dyfeomorfizmów. Dyfeomorfizmy φ_t będą służyły do przenoszenia wartości pól tensorowych z otoczenia punktu $q \in M$ do punktu q. Przyjrzyjmy się sytuacji dla pola kowektorowego czyli dla jednoformy. Niech więc $\alpha \in \Omega^1(M)$ będzie jednoformą. Ustalmy $q \in M$ i rozważmy krzywą

$$t \longmapsto (\varphi_t^*\alpha)(q).$$

Jest to krzywa, której wartości leżą w przestrzeni wektorowej T^*_qM. Wektor styczny do krzywej w przestrzeni wektorowej może być identyfikowany z elementem tej samej przestrzeni. Można go także znaleźć korzystając z tradycyjnego wzoru przypominającego „granicę ilorazu różnicowego". Mamy więc definicję

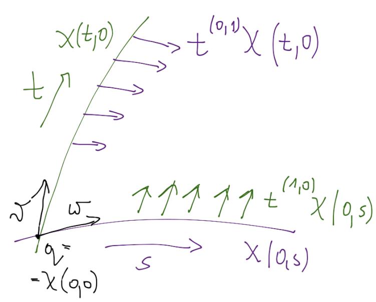
Definicja 1

$$(\mathcal{L}_X\alpha)(q) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left((\varphi_t^*\alpha)(q) - \alpha(q)\right)$$

Z definicji wynika, że pochodna Liego jest liniowa ze względu na dodawanie form oraz mnożenie form przez liczby. Nie jest jednak liniowa ze względu na mnożenie przez funkcje. Definicja jest niestety mało praktyczna. Spróbujmy znaleźć jakiś wygodny wzór na pochodną Liego jednoformy. Skorzystamy ze wzoru na różniczkę jednoformy zwanego *wzorem Tulczyjewa*. Weźmy dwa wektory $v, w \in \mathsf{T}_qM$ i odwzorowanie $\chi : \mathbb{R}^2 \to M$ takie, że $\chi(0,0) = q$, v jest wektorem stycznym do krzywej $t \mapsto \chi(t,0)$ i w jest wektorem stycznym do krzywej $s \mapsto \chi(0,s)$. Wartość różniczki formy α na wektorach v i w możemy obliczyć według wzoru

$$\mathsf{d}\alpha(v,w) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}_{|t=0}\langle \alpha(\chi(t,0)), \mathsf{t}^{(0,1)}\chi(t,0)\rangle - \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}_{|s=0}\langle \alpha(\chi(0,s)), \mathsf{t}^{(1,0)}\chi(0,s)\rangle.$$

W powyższym wzorze wektor $\mathsf{t}^{(0,1)}\chi(t,0)$ oznacza wektor styczny do krzywej $s \longmapsto \chi(t,s)$ w



Rys. 1: Ilustracja do wzoru Tuczyjewa

$s = 0$, czyli zaczepiony w punkcie $\chi(t,0)$. Podobnie wektor $\mathsf{t}^{(1,0)}\chi(0,s)$ oznacza wektor styczny do krzywej $t \longmapsto \chi(t,s)$ w $t = 0$, czyli zaczepiony w punkcie $\chi(0,s)$. W układzie współrzędnych powyższe rachunki wyglądałyby tak:

$$\alpha = \alpha_i(x)\mathsf{d}x^i, \quad v = v^i\partial_i, \quad w = w^i\partial_i, \quad \chi(s,t) = (x^i(q) + v^it + w^is),$$

$$\mathsf{t}^{(0,1)}\chi(t,0) = (x^i(q) + v^it, w^i), \qquad \mathsf{t}^{(1,0)}\chi(0,s) = (x^i(q) + w^is, v^i),$$

$$\mathsf{d}\alpha(v,w) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}_{|t=0}\Big(\alpha_i(x^i(q) + v^it)w^i\Big) - \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}_{|s=0}\Big(\alpha_i(x^i(q) + w^is)v^i\Big) = \frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j}v^jw^i - \frac{\partial\alpha_i}{\partial x^j}w^jv^i.$$

Niezależność wyniku od wyboru odwzorowania χ wynika z symetrii drugich pochodnych cząstkowych. Istrotnie, w układzie współrzędnych odwzorowanie χ dane jest przez układ gładkich funkcji dwóch zmiennych $\chi(t,s) = (\chi^i(t,s))$. Wzór Tulczyjewa przyjmuje więc postać

$$\mathsf{d}\alpha(v,w) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}_{|t=0}\left(\alpha_i(\chi^j(t,0))\frac{\partial\chi^i}{\partial s}(t,0)\right) - \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}_{|s=0}\left(\alpha_i(\chi^j(0,s))\frac{\partial\chi^i}{\partial t}(0,s)\right) =$$
$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^k}(\chi^j(0,0))\frac{\partial\chi^k}{\partial t}(0,0)\frac{\partial\chi^i}{\partial s}(0,0) + \alpha_i(\chi^j(0,0))\frac{\partial^2\chi^i}{\partial t\partial s}(0,0) +$$
$$\frac{\partial\alpha_i}{\partial x^k}(\chi^j(0,0))\frac{\partial\chi^k}{\partial s}(0,0)\frac{\partial\chi^i}{\partial t}(0,0) + \alpha_i(\chi^j(0,0))\frac{\partial^2\chi^i}{\partial s\partial t}(0,0)$$

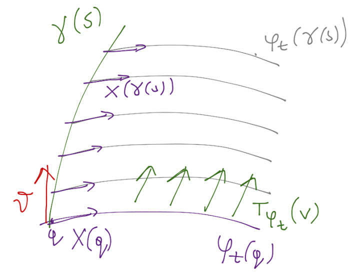
Fragmenty zaznaczone na czerwono upraszczają się, natomiast

$$\chi^i(0,0) = x^i(q), \quad \frac{\partial \chi^k}{\partial s}(0,0) = w^k, \quad \frac{\partial \chi^j}{\partial t}(0,0) = v^j.$$

Wróćmy teraz do pochodnej Liego formy α. Wiadomo, że $\mathcal{L}_X\alpha$ ma być jednoformą – dowiemy się jaka to jest jednoforma, jeśli będziemy wiedzieli jak ona działa na wektor styczny v. Weźmy więc ustalony (ale dowolny) wektor $v \in \mathsf{T}_qM$ oraz jakąś krzywą $s \mapsto \gamma(s)$, którą ten wektor reprezentuje. Używając wzoru Tulczyjewa obliczymy $\mathsf{d}\alpha(X(q), v)$ przyjmując jako χ odwzorowanie $\chi(t,s) = \varphi_t(\gamma(s))$. W tej sytuacji

$$\mathsf{t}^{(0,1)}\chi(t,0) = \mathsf{T}\varphi_t(v), \qquad \mathsf{t}^{(1,0)}\chi(0,s) = X(\gamma(s))$$

Wstawiamy powyższe informacje do wzoru Tulczyjewa



Rys. 2: Odwzorowanie $\chi(t,s) = \varphi_t(\gamma(s))$

$$\mathsf{d}\alpha(X(q), v) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}_{|t=0}\langle \alpha(\varphi_t(q)), \mathsf{T}\varphi_t(v)\rangle - \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}_{|s=0}\langle \alpha(\gamma(s)), X(\gamma(s)\rangle =$$
$$\frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}_{|t=0}\langle (\varphi_t^*\alpha)(q), v\rangle - \langle \mathsf{d}(\imath(X)\alpha)(q), v\rangle$$

Pierwszy ze składników to właśnie wartość $\mathcal{L}_X\alpha$ na wektorze v. Otrzymaliśmy zatem równość

$$\mathsf{d}\alpha(X(q), v) = \langle (\mathcal{L}_X\alpha)(q), v\rangle - \langle \mathsf{d}(\imath(X)\alpha)(q), v\rangle$$

Biorąc pod uwagę, że punkt q i wektor styczny v były wybrane dowolnie otrzymujemy równość

$$\mathcal{L}_X\alpha = \imath(X)\mathsf{d}\alpha + \mathsf{d}\imath(X)\alpha.$$

Wróćmy teraz na chwilę do **wzoru Tulczyjewa**. Przypomina on nieco inny wzór (Cartana) na różniczkę formy obliczoną na dwóch polach wektorowych. Dla jednoformy przyjmuje on postać

$$\mathsf{d}\alpha(X,Y) = X\alpha(Y) - Y\alpha(X) + \alpha([X,Y]).$$

Pierwszy i drugi składnik tego wzoru możemy wyznaczyć posługując się odpowiednio dobranym odwzorowaniem podobnym do χ. Oznaczymy przez φ_t potok pola X, zaś przez ψ_s potok pola Y. Na przykład $X\alpha(Y)$ to

$$X\alpha(Y) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\langle \alpha(\varphi_t(q)), \mathsf{T}\varphi_t(Y(q))\rangle$$

Wektor $\mathsf{T}\varphi_t(Y(q))$ to $\mathsf{t}^{(0,1)}\chi(t,0)$ dla odwzorowania $\chi(t,s) = \varphi_t(\psi_s(q))$. Składnik $Y\alpha(X)$ to

$$Y\alpha(X) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}s}\langle \alpha(\psi_s(q)), \mathsf{T}\psi_s(X(q))\rangle$$

Wektor $\mathsf{T}\psi_s(X(q))$ to $\mathsf{t}^{(1,0)}\tilde{\chi}(0,s)$ dla odwzorowania $\tilde{\chi}(t,s) = \psi_s(\varphi_t(q)))$. Odwzorowania χ i $\tilde{\chi}$ nie zazwyczaj pokrywają się. Konkretny przykład zobaczą państwo na ćwiczeniach. Miarą braku zgodności jest właśnie $[X,Y]$, który jako poprawka pojawia się w trzeciej części wzoru.

Kolejnym zadaniem będzie znalezienie pochodnej Liego funkcji na rozmaitości f. Definicja formalna jest bardzo podobna jak dla jednoformy:

$$(\mathcal{L}_X f)(q) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(f(\varphi_t(q)) - f(q)\right)$$

Jest dość oczywiste, że

$$\mathcal{L}_X f = Xf = \mathsf{d}f(X) = \imath(X)\mathsf{d}f$$

Sprawdzimy teraz jak pochodna Liego działa na iloczyn $f\alpha$. Iloczyn funkcji i jednoformy to też jednoforma, więc możemy użyć świeżo wyprowadzonego wzoru:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(f\alpha) = \imath(X)\mathsf{d}(f\alpha) + \mathsf{d}\imath(X)(f\alpha) = \imath(X)(\mathsf{d}f\wedge\alpha + f\mathsf{d}\alpha) + \mathsf{d}(f\imath(X)\alpha) = \\ (\imath(X)\mathsf{d}f)\alpha - (\imath(X)\alpha)\mathsf{d}f + f\imath(X)\mathsf{d}\alpha + \imath(X)\alpha)\mathsf{d}f + f\mathsf{d}(\imath(X)\alpha) = \\ (\mathcal{L}_X f)\alpha + f\left(\imath(X)\mathsf{d}\alpha + \mathsf{d}(\imath(X)\alpha)\right) = (\mathcal{L}_X f)\alpha + f\mathcal{L}_X\alpha\end{aligned}$$

Uzyskaliśmy coś w rodzaju reguły Leibniza:

$$\mathcal{L}_X(f\alpha) = (\mathcal{L}_X f)\alpha + f\mathcal{L}_X\alpha.$$

Pora rozszerzyć pojęcie pochodnej Liego na wieloformy. Formalnie definicja wygląda identycznie.

Definicja 2 *Pochodną Liego k-formy ω w kierunki pola X nazywamy k-formę, której wartość w punkcie q dana jest wzorem*

$$(\mathcal{L}_X\omega)(q) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left((\varphi_t^*\omega)(q) - \omega(q)\right)$$

Zobaczmy jak to działa na iloczynie zewnętrznym:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(\alpha\wedge\beta) = \lim_{t\to 0}\left(\varphi_t^*(\alpha\wedge\beta) - \alpha\wedge\beta\right) = \\ \lim_{t\to 0}\left(\varphi_t^*\alpha\wedge\varphi_t^*\beta - \varphi_t^*\alpha\wedge\beta + \varphi_t^*\alpha\wedge\beta - \alpha\wedge\beta\right) = \\ \lim_{t\to 0}\left(\varphi_t^*\alpha\wedge(\varphi_t^*\beta - \beta) + +(\varphi_t^*\alpha - \alpha)\wedge\beta\right) = \\ \lim_{t\to 0}\varphi_t^*\alpha\wedge\left(\frac{\varphi_t^*\beta - \beta}{t}\right) + \lim_{t\to 0}\left(\frac{\varphi_t^*\alpha - \alpha}{t}\right)\wedge\beta = \\ (\mathcal{L}_X\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge\mathcal{L}_X(\beta)\end{aligned}$$

Tym razem to już nie „coś w rodzaju", tylko poprostu reguła Leibniza. Wygląda na to, że pochodna Liego jest różniczkowaniem algebry zewnętrznej form różniczkowych. Ze względu na przemienność d i pull-backu obowiązuje także wzór

$$\mathcal{L}_X \mathsf{d}\omega = \mathsf{d}\mathcal{L}_X\omega.$$

Wzór wyprowadzony wcześniej dla jednoform okazuje się obowiązywać także dla wieloform. Rachunek przeprowadzimy na współrzędnych i skorzystamy z liniowości:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_X(f\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_k}) = \\
&\qquad (\mathcal{L}_X f)(\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_k}) + f\sum_{j=1}^{k}\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathcal{L}_X\mathsf{d}x^{i_j}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_k} = \\
&\qquad\qquad (Xf)\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_k} + f\sum_{j=1}^{k}\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}X^{i_j}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_k}
\end{aligned}\tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&\imath(X)\mathsf{d}(f\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_k}) = \imath(X)\mathsf{d}f\wedge\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_k} = \\
&\qquad (Xf)\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_k} + \mathsf{d}f\wedge\left(\sum_{j=1}^{k}(-1)^j X^{i_j}\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathsf{d}x^{i_j}}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_k}\right)
\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}
&\mathsf{d}(\imath(X)f\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_k}) = \\
&\qquad \mathsf{d}(f\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}X^{i_j}\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathsf{d}x^{i_j}}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_k} = \\
&\mathsf{d}f\wedge\left(\sum_{j=1}^{k}(-1)^{j-1}X^{i_j}\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{\mathsf{d}x^{i_j}}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_k}\right) + f\sum_{j=1}^{k}\mathsf{d}x^{i_1}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}X^{i_j}\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^{i_k}
\end{aligned}\tag{4}$$

Dodając (3) i (4) otrzymujemy (2), gdyż wyrazy zaznaczone na zielono upraszczają się. Podsumujmy własności pochodnej Liego w działaniu na formy różniczkowe:

Fakt 1 *1. Pochodna Liego k-formy jest k-formą,*

2. Pochodna Liego jest operacją liniową, tzn dla $a, b\in\mathbb{R}$ $\mathcal{L}_X(a\alpha+b\beta) = a\mathcal{L}_X\alpha + b\mathcal{L}_X\beta$,

3. Spełniona jest regułą Leibniza $\mathcal{L}_X(\alpha\wedge\beta) = (\mathcal{L}_X\alpha)\wedge\beta + \alpha\wedge\mathcal{L}_X\beta$,

4. W działaniu na formy prawdziwy jest wzór $\mathcal{L}_X = \imath(X)\mathsf{d} + \mathsf{d}\imath(X)$.

Pozostaje sprawdzenie jak pochodna Liego działa na pola wektorowe.

Definicja 3

$$\mathcal{L}_X Y = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\mathsf{T}\varphi_{-t}(Y(\varphi_t(q))) - Y(q)\right).$$

Zgodnie z definicją transportujemy wartość pola Y z punktu $\varphi_t(q)$ do punktu q. Tym razem musimy użyć odwzorowania stycznego $\mathsf{T}\varphi_{-t}$. Powstałą krzywa jest krzywą w przestrzeni wektorowej T_qM. Wartość pochodnej Liego to wektor styczny do tej krzywej.

Fakt 2

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

Dowód:

$$(\mathcal{L}_X Y)f = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\mathsf{T}\varphi_{-t}(Y(\varphi_t(q)))f - Y(q)f\right) =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\mathsf{T}\varphi_{-t}(Y(\varphi_t(q)))f - Y(\varphi_t(q))f + Y(\varphi_t(q))f - Y(q)f\right) =$$

Fragment zaznaczony na czerwono to

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(Y(\varphi_t(q))f - Y(q)f\right) = X(Yf)$$

Fragment zaznaczony na niebiesko to

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\mathsf{T}\varphi_{-t}(Y(\varphi_t(q)))f - Y(\varphi_t(q))f\right) = \lim_{t\to 0} Y(\varphi_t(q))) \left(\frac{f \circ \varphi_{-t} - f}{t}\right) = -Y(Xf)$$

Ostatecznie

$$\mathcal{L}_X Y f = X(Yf) - Y(Xf) = [X, Y]f$$

Z dowolności f wynika teza.$\square$