Notatki do wykładu Geometria Różniczkowa I

Katarzyna Grabowska, KMMF

13 stycznia 2014

1 Różniczkowanie pól i form

W poprzednim podrozdziale zajmowaliśmy się różniczkowaniem pól tensorowych wzdłuż pola wektorowego, czyli pochodną Liego $\mathcal{L}_X$. Wartość pochodnej Liego zależy w sposób bardzo istotny od pola wektorowego wzdłuż którego różniczkujemy. Zależność ta jest poważniejsza niż tylko zależność od wartości pola w danym punkcie q - jest to zależność od tego jakie jest pole w otoczeniu q. Oczywiście pochodna Liego różniczkuje swój argument, to znaczy jeśli argument pomnożymy przez funkcję, wynik będzie zależał od pochodnych tej funkcji: Dla pola wektorowego otrzymamy

$$\mathcal{L}_X(fY) = [X, fY] = f[X,Y] + (Xf)Y = f\mathcal{L}_X Y + (\mathcal{L}_X f)Y \tag{1}$$

a dla formy α

$$\mathcal{L}_X(f\alpha) = (\mathcal{L}_X f)\alpha + f\mathcal{L}_X\alpha \tag{2}$$

Wzory (1) i (2) wyrażają *regułę Leibniza* dla pochodnej Liego. Okazuje się, że podobnie jest jeśli pomnożymy przez funkcję pole wzdłuż którego różniczkujemy. Porównajmy $\mathcal{L}_X$ z $\mathcal{L}_{fX}$ dla gładkiej funkcji f. Najpierw pochodna Liego pola wektorowego

$$\mathcal{L}_{fX}Y = [fX, Y] = f[X,Y] - (Yf)X = f\mathcal{L}_X Y - \langle \mathsf{d}f, Y\rangle X \tag{3}$$

potem pochodna formy

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{fX}\alpha &= \imath(fX)\mathsf{d}\alpha + \mathsf{d}(\imath(fX)\alpha) = f\imath(X)\mathsf{d}\alpha + \mathsf{d}(f\imath(X)\alpha) = \\ &= f\imath(X)\mathsf{d}\alpha + \mathsf{d}f\wedge\imath(X)\alpha + f\mathsf{d}\imath(X)\alpha = f\mathcal{L}_X\alpha + \mathsf{d}f\wedge\imath(X)\alpha\end{aligned} \tag{4}$$

W obu wzorach (3) i (4) pojawia się różniczka funkcji f, co wskazuje na zależność od wartości pola w otoczeniu q, a nie jedynie w punkcie q. My jednak cały czas poszukujemy odpowiednika różniczkowania po współrzędnych, które jest możliwe na $\mathbb{R}^n$, lub ogólniej, na przestrzeni afinicznej. We współrzędnych (x^a) związanych z punktem q_0 i bazą (e_a) w przestrzeni modelowej V różniczkowanie to wygląda następująco

$$D_v(X) = v^a(\partial_a X^b)e_b, \tag{5}$$

gdzie $v = v^a e_a$ oraz $X = X^b e_b$. Wzór jest poprawny, tzn jest niezmienniczy ze względu zmianę bazy w V i zmianę punktu początkowego a_0. Wzór (5) jest poprawny dlatego, że wiązka styczna do przestrzeni afinicznej jest trywialna: przestrzeń styczna w każdym punkcie jest kanonicznie izomorficzna z V. Jeszcze inaczej można powiedzieć, że wzór (5) jest poprawny ponieważ wiemy co to znaczy przesuwać wektor styczny wzdłuż krzywej w A. Rozważając powierzchnię $M \subset A$ nie możemy użyć wzoru (5), bo na powierzchni nie mamy wyróżnionej klasy układów współrzędnych. Jeśli zaś użyjemy dowolnych współrzędnych wzór przestanie być niezmienniczy, czyli nie będzie definiował żadnego obiektu geometrycznego. Pole wektorowe $X : M \to \mathsf{T}M$ możemy oczywiście zapisać w bazie (e_a) otrzymując $X = X^a e_a$ (zatem na oko podobnie jak poprzednio), z tą jednak różnicą, że funkcje X^a określone są jedynie w punktach należących do M. Możemy także, korzystając z zanurzenia M w A wyliczyć $D_v X$ jeśli tylko $v \in \mathsf{T}M$. Problem w tym, że otrzymany wektor najprawdopodobniej nie jest styczny do M. Z tego da się wybrnąć jeśli w V mamy wyróżniony iloczyn skalarny. (Tak jest oczywiście jeśli $A = \mathbb{R}^n$.) Iloczyn skalarny pozwala rozłożyć przestrzeń $\mathsf{T}_q A = V$ styczną do A w punkcie q na sumę prostą przestrzeni $\mathsf{T}_q M = W_q$ i $W_q^\perp$, tzn

$$V = W_q \oplus W_q^\perp \tag{6}$$

Możemy teraz napisać definicję

Definicja 1 Niech M będzie powierzchnią zanurzoną w przestrzeni afinicznej A z wyróżnionym iloczynem skalarnym. *Pochodną kowariantną* pola wektorowego X na M w kierunku wektora stycznego $v \in \mathsf{T}_q M$ nazywamy wektor

$$\nabla_v X = (D_v X)^\parallel, \tag{7}$$

gdzie $(\cdot)^\parallel$ oznacza rzut na W_q związany z rozkładem (6).

W powyższej definicji współrzędne nie są używane, nie ma więc wątpliwości, że (7) definiuje pewien wektor z W_q. Wyrażenie na współrzędnych też będzie nam potrzebne. Wprowadźmy w tym celu w otoczeniu q w M układ współrzędnych (φ^i), $i = 1 \dots k$. Wektory ∂_i tworzą więc bazę W_q. Potrzebujemy jeszcze $n-k$ wektorów rozpinających $W_q^\perp$. Oznaczymy je n_α, $\alpha = 1 \dots n-k$. Każdy z wektorów e_a zapisać możemy w bazie złożonej z ∂_i oraz n_α otrzymując

$$e_a = A_a^i \partial_i + A_a^\alpha n_\alpha$$

Macierz A, której pierwsze k wierszy to A_a^i a dalsze $n-k$ wierszy to A_a^α jest macierzą przejścia z bazy (e_a) do bazy (∂_i, n_α). Wyrazy macierzowe A_a^i i A_a^α są funkcjami na M, można je więc wyrazić jako funkcje współrzędnych (φ^i). Pole wektorowe X zapisujemy w bazie e_a: $X = X^a(\varphi^i) e_a$, wektor v zapisujemy w bazie (∂_i) i wyznaczamy

$$D_v X = v^i (\partial_i X^a) e_a.$$

Żeby wziąć część styczną do M używamy macierzy A:

$$D_v X = v^i (\partial_i X^a)(A_a^j \partial_j + A_a^\alpha n_\alpha).$$

Widać więc, że

$$\nabla_v X = v^i (\partial_i X^a) A_a^j \partial_j.$$

W powyższym wzorze nie podoba mi się jszcze to, że pole X cały czas mamy wyrażone w bazie e_a a nie w bazie ∂_i, która jest dla niego naturalniejsza.

$$X^a = (A^{-1})_i^a X^i,$$

zatem

$$\nabla_v X = v^i\partial_i((A^{-1})^a_k X^k)A^j_a\partial_j = v^i\partial_i((A^{-1})^a_k)X^k A^j_a\partial_j + v^i(A^{-1})^a_k\partial_i(X^k)A^j_a\partial_j = \partial_i(X^j)v^i\partial_j + [\partial_i((A^{-1})^a_k)A^j_a]v^i X^k\partial_j \tag{8}$$

Zauważmy, że fragment wzoru zapisany na niebiesko nie zależy wcale od pola X ani od kierunku w którym różniczkujemy. Jest on związany z powierzchnią na której o wszystko się dzieje. Niebieskie funkcje oznaczamy Γ^j_{ik}, tzn

$$\Gamma^j_{ik} = \partial_i((A^{-1})^a_k)A^j_a \tag{9}$$

i nazywamy *symbolami Christoffela* (Erwin Bruno Christoffel (1829-1900), matematyk niemiecki). Z użyciem symboli Christoffela pochodną kowariantną zapisujemy następująco

$$\nabla_v X = \partial_i(X^j)v^i + \Gamma^j_{ik}v^i X^k. \tag{10}$$

Przykład 1 Policzmy (niektóre) symbole Christoffela na sferze $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Mamy $n = 3$, $k = 2$, współrzedne x^a to (x,y,z), współrzędne (φ^i) to (φ, θ) pochodzące ze sferycznego układu współrzędnych. Baza e_a to $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, baza (∂_i) to $(\partial_\varphi, \partial_\theta)$, jako wektor normalny możemy wziąć ∂_r. Posługując się znanymi wzorami

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\sin\theta \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

i przyjmując $r = 1$ najdujemy wyrazy macierzowe macierzy A^{-1}

$$\begin{aligned} \partial_\varphi &= -\sin\varphi\sin\theta\partial_x + \cos\varphi\sin\theta\partial_y \\ \partial_\theta &= \cos\varphi\cos\theta\partial_x + \sin\varphi\cos\theta\partial_y - \sin\theta\partial_z \\ \partial_r &= \cos\varphi\sin\theta\partial_x + \sin\varphi\sin\theta\partial_y + \cos\theta\partial_z \end{aligned}$$

Macierz A^{-1} ma postać

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\sin\varphi\sin\theta & \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & \sin\varphi\sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

zatem

$$A = \begin{bmatrix} -\dfrac{\sin\varphi}{\sin\theta} & \dfrac{\cos\varphi}{\sin\theta} & 0 \\ \cos\varphi\cos\theta & \sin\varphi\cos\theta & -\sin\theta \\ \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Skorzystamy ze wzoru (9) zauważając, że można go zapisać na dwa sposoby:

$$\Gamma^j_{ik} = \partial_i((A^{-1})^a_k)A^j_a = -\partial_i(A^j_a)(A^{-1})^a_k.$$

Przykładowe rachunki:

$$\Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi} = -\partial_\varphi\left(-\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\right)(-\sin\varphi\sin\theta) - \partial_\varphi\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\right)(-\cos\varphi\sin\theta) =$$
$$-\cos\varphi\sin\varphi + \cos\varphi\sin\varphi = 0$$

$$\Gamma^{\varphi}_{\theta\varphi} = -\partial_\varphi\left(-\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\right)(\cos\varphi\cos\theta) - \partial_\varphi\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\right)(\sin\varphi\cos\theta) =$$
$$\cos^2\varphi\cot\theta + \sin^2\varphi\cot\theta = \cot\theta$$

Pozostałe współczynniki Christoffela na sferze proszę wyznaczyć samodzielnie. Żeby oszczędzić sobie rachunków można skorzystać z faktu (który udowodnimy wkrótce), że

Fakt 1 *Współczynniki Chrisoffela na powierzchni zanurzonej są symetryczne, tzn* $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.

♣

W dalszym ciągu spróbujemy przyjrzeć się pochodnej kowariantnej i wyciągnąć z jej definicji istotne elementy, które można będzie uogólnić na rozmaitości niezanurzone. Szukamy więc tej dodatkowej struktury, która jest potrzebna, żeby pochodna kowariantna istniała. Najpierw pomyślimy chwile nad strukturą iterowanej wiązki stycznej $\mathsf{TT}A$. Wiadomo, że $\mathsf{T}A$ jest trywialna i równa $A\times V$, zatem nie ma wątpliwości, że $\mathsf{TT}A = A\times V\times V\times V$ Przestrzeń styczna do $\mathsf{T}A$ w punkcie (q,w) zawiera wektory styczne do krzywych $t\mapsto(q(t),w(t))$, gdzie $q(0)=q$, $w(0)=w$. Oznaczmy $v=\dot q(0)$ i $u=\dot w(0)$. Element $\mathsf{TT}A$ jest więc czwórką (q,w,v,u). Wśród wszystkich krzywych w $\mathsf{T}A$ przechodzących przez (q,w) dla $t=0$ możemy wyróżnić dwie klasy: krzywe dla których $q(t)=q$ jest stałe oraz krzywe dla których $w(t)=w$ jest stałe. Wektory styczne do krzywych z pierwszej klasy są postaci $(q,w,0,u)$ a wektory styczne do krzywych z drugiej klasy mają postać $(q,w,v,0)$. Pierwsze z nich nazywać będziemy *pionowymi* (wertykalnymi) a drugie *poziomymi* (horyzontalnymi). Wektory pionowe zaczepione w punkcie (q,w) oznaczymy $\mathsf{V}_{q,w}\mathsf{T}A$ a poziome $\mathsf{H}_{q,w}\mathsf{T}A$. W ten sposób mamy rozkład przestrzeni stycznej do $\mathsf{T}A$ w punkcie (q,w) na sumę prostą wektorów pionowych i poziomych:

$$\mathsf{T}_{q,w}\mathsf{T}A = \mathsf{V}_{q,w}\mathsf{T}A \oplus \mathsf{H}_{q,w}\mathsf{T}A.$$

Krzywą poziomą, tzn taką dla której $w(t)=w$ jest stałe możemy interpretować jako przesunięcie równoległe wektora w wzdłuż krzywej $t\mapsto q(t)$.

Co z tego wszystkiego przetrwa obcięcie do powierzchni M? Z całą pewnością nie wszystko. Wiemy już od dawna, że $\mathsf{T}M$ nie jest wiązką trywialną. Przestrzeń $\mathsf{T}_qM = W_q$ jest podprzestrzenią w V, ale w każdym punkcie nieco inną, więc w $\mathsf{T}M$ nie mamy struktury iloczynu kartezjańskiego. Jedyne co pozostaje to rzut na M. Iterowana wiązka styczna $\mathsf{TT}M$ nadal zawiera oczywiście wektory styczne do krzywych w $\mathsf{T}M$, ale z dwóch opisanych wcześniej klas pozostaje tylko jedna. Krzywą w $\mathsf{T}M$ nadal możemy zapisać jako $t\mapsto(q(t),w(t))$ korzystając z zanurzenia, ale pamiętać musimy, że $w(t)\in W_{q(t)}$. Krzywa pionowa $t\mapsto(q,w(t))$ nadal jest krzywą w $\mathsf{T}M$, ale krzywa $t\mapsto(q(t),w)$ może „wyłazić” poza $\mathsf{T}M$. Nie wiemy jak przesuwać wektory styczne równolegle wzdłuż krzywych, nie mamy więc pojęcia krzywej poziomej.

Z rozkładu iterowanej przestrzeni stycznej na część poziomą i pionową przeżywa tylko podwiązka pionowa zawierająca wektory styczne do krzywych pionowych. Załóżmy teraz na chwilę, że M jest poziomicą odwzorowania $F : A \to \mathbb{R}^m$, potraktujmy $\mathsf{TT}M$ jako zawarte w $\mathsf{TT}A$ i sprawdźmy jakie podzbiory dostaniemy w poszczególnych czynnikach iloczynu kartezjańskiego $\mathsf{TT}A = A \times V \times V \times V$. Na pierwszym mejscu mamy $M \subset A$, $M = F^{-1}(0)$. Gdy ustalimy $q \in M$ to na drugim miejscu mamy $W_q = \ker F'(q)$. Rozważmy teraz krzywą $t \mapsto (q(t), w(t))$ w $\mathsf{T}M$. Wektor styczny do tej krzywej może nadal być reprezentowany czwórką (q, w, v, u), musimy tylko wiedzieć jakie warunki musze spełniać v i u. Krzywa $t \mapsto q(t)$ leży w M, zatem $v = \dot{q}(0)$ leży w W_q (na trzecim miejscu jest więc W_q). Krzywa $w(t)$ ma wartości w $W_{q(t)}$, to znaczy dla każdego t zachodzi

$$F'(q(t))(w(t)) = 0.$$

Po zróżniczkowaniu dostajemy zatem warunek na $u = \dot{w}(0)$ w postaci

$$F''(q)(v, w) + F'(q)(u) = 0.$$

Wektor u jest więc elementem podprzestrzeni afinicznej w V modelowanej na W_q. Podprzestrzeń ta zależy nie tylko od q i w ale także od v. Oznaczymy ją $U_{q,w,v}$ (to jest podzbiór pojawiający se na czwartym miejscu) . Ostatecznie (q, w, v, u) jest elementem $\mathsf{TT}M$ jeśli $q \in M$, $w, v \in W_q$, $u \in U_{q,w,v}$. Co to wszystko ma wspólnego z pochodną kowariantną? O tym na następnym wykładzie.