Notatki do wykładu Geometria Różniczkowa I

Katarzyna Grabowska, KMMF

23 stycznia 2014

1 Różniczkowanie pól i form

1.1 Pochodna kowariantna

Zaległy fakt:

Fakt 1 *Współczynniki Christoffela na powierzchni zanurzonej są symetryczne, tzn* $\Gamma^i_{jk} = \Gamma^i_{kj}$.

Dowód: Symetria wpółczynników Christoffela dla pochodnej kowariantnej pochodzącej od zanurzenia powierzchni w przestrzeń afiniczną z iloczynem skalarnym wynika z symetrii drugich pochodnych cząstkowych. Istotnie, wyrazy macierzowe występujące we wzorze (**??**) pochodzą od zamiany zmiennych, tzn

$$(A^{-1})^a_k = \frac{\partial x^a}{\partial \varphi^k}.$$

Wstawiając powyższą postać wyrazów macierzowych $(A^{-1})^a_k$ do (**??**) otrzymujemy

$$\Gamma^j_{ik} = \partial_i \left(\frac{\partial x^a}{\partial \varphi^k} \right) A^j_a = \frac{\partial^2 x^a}{\partial \varphi^i \partial \varphi^k} A^j_a = \partial_k \left(\frac{\partial x^a}{\partial \varphi^i} \right) A^j_a = \Gamma^j_{ki} \quad \square$$

♣

Wzór (**??**) definiujący $D_v X$ dla pola wektorowego X na przestrzeni afinicznej A wyrażony jest we współrzędnych, w dowolnym, ale afinicznym układzie współrzędnych. Czy potrafimy zdefiniować tę wielkość bez użycia współrzednych? Niech v będzie elementem $\mathsf{T}_q A = V$ a $t \mapsto q(t)$ krzywą taką, że $\dot{q}(0) = v$. Pole wektorowe X jest odwzorowaniem $X : A \to \mathsf{T}A$. Składając $q(\cdot)$ z X otrzymujemy krzywą $t \mapsto X(q(t))$, której wartości leżą w $\mathsf{T}A$. Wektor styczny do $X \circ q(\cdot)$ w punkcie $(q, X(q))$ to czwórka $(q, X(q), v, D_v(X))$. Okazuje się, więc, że $D_v(X)$ *jest częścią pionową wektora stycznego do* $X \circ q(\cdot)$ wyznaczoną względem rozkładu (**??**). Dla pełnej poprawności musimy jeszcze zauważyć, że wektory pionowe są styczne do przestrzeni stycznej w jednym punkcie, zatem mogą zostać utożsamione z elementami tej przestrzeni.

Zgodnie z naszymi obserwacjami w $\mathsf{T}_{q,w}\mathsf{T}M$ jest wyróżniona podprzestrzeń wektorów pionowych, ale nie ma podprzestrzeni wektorów poziomych, dlatego nie ma też rozkładu podobnego do (**??**) i rzutu na wektory pionowe. Okazuje się jednak, że jeśli A (a właściwie V) jest wyposażona w iloczyn skalarny w $\mathsf{T}_{q,w}\mathsf{T}M$ to podprzestrzeń wektorów horyzontalnych pojawia się w sposób naturalny. Rozważmy wektor styczny do $\mathsf{T}M$ w punkcie (q, w) reprezentowany czwórką (q, w, v, u). Wiadomo, że $w, v \in W_q$ oraz $u \in U_{q,w,v}$, przy czym ostatnia przestrzeń jest pewną podprzestrzenią afiniczną modelowaną na W_q. Zauważmy, że jeśli $U_{q,w,v}$ nie jest równe W_q, to $W_q^\perp \cap U_{q,w,v} = \{u_0\}$, tzn istnieje dokładnie jeden wektor prostopadły do W_q i zawarty w $U_{q,w,v}$. Istotnie, załóżmy, że sa przynajmniej dwa różne takie wektory u_0 i $\tilde{u}_0$. Wówczas $u_0 - \tilde{u}_0$ jest jednocześnie elementem przestrzeni W_q modelowej dla $U_{q,w,v}$ oraz elementem $W_q^\perp$. Oznacza to, że $u_0 = \tilde{u}_0$. Z drugiej strony $W_q^\perp \cap U_{q,w,v}$ nie może być zbiorem pustym. Każdy element $u \in U_{q,w,v}$ rozłożyć można według sumy prostej (**??**) $u = u^\parallel + u^\perp$. Wtedy $u^\perp = u - u^\parallel$ jest elementem $U_{q,w,v}$ i jednocześnie elementem W_p. Z powyższych rozważań wynika, że wszystkie $u \in U_{q,w,v}$ mają tę samą część prostopadłą do W_p. Czwórkę reprezentującą wektor styczny do $\mathsf{T}M$ w punkcie (q, w) można zapisać więc jako

$$(q, w, v, u_0 + u^\parallel)$$

i rozłożyć na sumę

$$(q, w, v, u_0 + u^\parallel) = (q, w, v, u_0) + (q, w, 0, u^\parallel). \tag{1}$$

Pierwszy wektor nazywać będziemy *poziomym* a drugi *pionowym*. Znowu widzimy, że część pionowa może być łatwo identyfikowana z elementem $u^\parallel \in \mathsf{T}_qM = W_q$. Ostatni wektor w czwórce odpowiadającej wektorowi poziomemu jest jednoznacznie wyznaczony (zakładając, że znamy q, w, v) co oznacza, że istnieje podniesienie horyzontalne wektorów z T_qM do wektorów z $\mathsf{T}_{q,w}\mathsf{T}M$ dla dowolnego w. Istotnie niech $(q, v) \in \mathsf{T}_qM$ oraz $(q, w) \in \mathsf{T}_qM$ wtedy *podniesieniem horyzontalnym* (q, v) do punktu (q, w) nazywamy wektor

$$(q, v)^h_{(q,w)} = (q, w, v, u_0)$$

gdzie $u_0 = W_q^\perp \cap U_{q,w,v}$.

Wróćmy teraz do pola wektorowego X na M i wektora $v \in \mathsf{T}M$ stycznego do krzywej $t \mapsto q(t)$. Wektor styczny do złożenia $X \circ q(\cdot)$ jest elementem $\mathsf{TT}M$ danym przez czwórkę $(q, X(q), v, D_vX)$. O D_vX wiadomo, że należy do przestrzeni afinicznej $U_{q,X(q),v}$, daje się więc rozłożyć na sumę $D_vX = (D_vX)^\perp + (D_vX)^\parallel$. Zgodnie z (1) otrzymujemy

$$(q, X(q), v, D_vX) = (q, X(q), v, (D_vX)^\perp) + (q, w, 0, (D_vX)^\parallel) = \\ (q, X(q), v, (D_vX)^\perp) + (q, X(q), 0, \nabla_vX). \tag{2}$$

Zapisane powyżej rozważania sformułujemy zaraz jako „Fakt”. Potrzebujemy jeszcze tylko bardziej eleganckiego opisu wektora stycznego do złożenia $X \circ q(\cdot)$. Jeśli potraktujemy X jako odwzorowanie $X : M \to \mathsf{T}M$ to wektor ten jest równy $\mathsf{T}X(v)$

Fakt 2 *Niech M oznacza powierzchnię zanurzoną w przestrzeni afinicznej A wyposażonej w iloczyn skalarny. Niech X będzie polem wektorowym na tej powierzchni. Pochodna kowariantna ∇_vX jest równa części pionowej wektora $\mathsf{T}X(v)$.*

Pokazaliśmy, że pochodna kowariantna na powierzchni M wiąże się z istnieniem rozkładu przestrzeni stycznej do $\mathsf{T}M$ na część pionową i poziomą. Na powierzchni zanurzonej w $\mathbb{R}^n$ ten rozkład istnieje naturalnie (bo $\mathbb{R}^n$ ma iloczyn skalarny). Rozkład przestrzeni stycznej na część poziomą i pionową nazywa się *koneksją* albo *powiązaniem*. Pochodna kowariantna i powiązanie są dwoma różnymi opisami tej samej struktury. W następnym semestrze dowiemy się, że bardzo podobnie definiuje się koneksję i pochodną kowariantną w dowolnej wiązce wektorowej lub w wiązce głównej (cokolwiek to znaczy). Na razie może się wydawać, że wszystkie te rachunki prowadzące od definicji **??** do faktu 2 są jedynie niepotrzebnym komplikowaniem prostego obiektu geometrycznego. Okazuje się jednak, że taki język (przestrzenie wertykalne i horyzontalne, podniesienie horyzontalne i koneksja) jest bardzo dobry do interpretowania na przykład krzywizny koneksji (następny semestr!). Już za chwilę przyda nam sie to wszystko do uzyskania odpowiedzi na pytanie co z czym powiązanie wiąże i jak przesuwać równolegle wektory na powierzchni zanurzonej.

W wiązce stycznej do przestrzeni afinicznej A wyróżniliśmy krzywe poziome postaci $t \mapsto (q(t), v)$ i pionowe postaci $t \mapsto (q, v(t))$. Krzywą poziomą interpretowaliśmy jako przesuniecie stałego wektora v wzdłuż krzywej $t \mapsto q(t)$. Zauważyliśmy także, że na powierzchni $M \subset A$ możemy wyróżnić naturalnie jedynie krzywe pionowe. Okazuje się jednak, że w obecności iloczynu skalarnego także pojęcie krzywej poziomej, a co za tym idzie przesunięcia wektora wzdłuż krzywej w M ma sens. Niech więc $t \mapsto q(t)$ będzie krzywą w M. W każdym punkcie tej krzywej wyznaczamy wektor styczny $(q(t), \dot{q}(t))$, który następnie podnosimy horyzontalnie do każdego punktu $(q(t), w) \in \mathsf{T}_{q(t)}M$. Otrzymamy w ten sposób pole wektorowe na $\tau_M^{-1}(\{q(t), t \in I\}$. To pole wektorowe możemy potraktować jak równanie różniczkowe na krzywe w $\mathsf{T}M$ leżące nad krzywą $t \mapsto q(t)$. Rozwiązanie tego równania z warunkiem początkowym dla $t = t_0$ będącym wektorem $w \in \mathsf{T}_{q(t_0}M = W_{q(t_0)}$ nazwiemy *przesunięciem równoległym wektora w wzdłuż krzywej* $t \mapsto q(t)$. Zobaczmy jak we współrzędnych wyglądać będzie równanie różniczkowe na przesunięcia równoległe.