Notatki do wykładu Geometria Różniczkowa I

Katarzyna Grabowska, KMMF

26 stycznia 2014

1 Różniczkowanie pól i form

1.1 Pochodna kowariantna

Zobaczmy jak we współrzędnych wyglądać będzie równanie różniczkowe na przesunięcia równoległe.

Rozważmy więc krzywą

$$t \longmapsto (q(t), w(t)) \in \mathsf{T}M, \quad \text{to znaczy} \quad q(t) \in M, \ \ w(t) \in W_{q(t)}.$$

Chcemy, żeby wektory styczne do tej krzywej były w każdym punkcie wektorami poziomymi. Krzywą $t \mapsto q(t)$ traktujemy jako daną, szukamy krzywej $t \mapsto w(t)$ spełniającej warunek początkowy $w(0) = w$. Wektor styczny do krzywej $t \mapsto (q(t), w(t))$ w punkcie odpowiadającym wartości parametru t jest elementem $\mathsf{TT}M$ postaci $(q(t), w(t), \dot{q}(t), \dot{w}(t))$. Wektor ten jest horyzntalny jeśli $\dot{q}(t) \in W^{\perp}_{q(t)}$.

$$\dot{w}(t) = \dot{w}(t)^a e_a = \dot{w}(t)^a A^i_a(q(t))\partial_i + \dot{w}(t)^a A^\alpha_a n_\alpha.$$

Warunek horyzontalności oznacza, że

$$\forall i \ \ \dot{w}(t)^a A^i_a(q(t)) = 0. \tag{1}$$

Ten warunek zapiszmy w terminach współrzędnych (φ^i) na M, gdyż wiadomo, że $w(t) = w^i(t)\partial_i$:

$$w^a(t) = (A^{-1}(q(t))^a_k w^k(t).$$

Powyższy wzór wstawiamy do (1)

$$\dot{w}^a(t) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\Big((A^{-1}(q(t))^a_k w^k(t)\Big) = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\Big((A^{-1}(q(t))^a_k\Big) w^k(t) + (A^{-1}(q(t))^a_k \dot{w}^k(t).$$

Ostatecznie (rezygnujemy z jawnego wypisywania zależności od t)

$$0 = \frac{\mathsf{d}}{\mathsf{d}t}\Big((A^{-1})^a_k\Big) w^k A^i_a + (A^{-1})^a_k \dot{w}^k A^i_a = \partial_j (A^{-1})^a_k \dot{q}^j w^k A^i_a + \dot{w}^i =$$
$$\Big[\partial_j (A^{-1})^a_k A^i_a\Big]\dot{q}^j w^k + \dot{w}^i = \Gamma^i_{jk}\dot{q}^j w^k + \dot{w}^k$$

Warunek na horyzontalnośc krzywej $t \mapsto (q(t), w(t))$ we współrzędnych ma postać

$$\dot{w}^i = -\Gamma^i_{jk}\dot{q}^j w^k \tag{2}$$

Przykład 1 Zróbmy stosowne rachunki na sferze dwuwymiarowej o promieniu 1 we współrzędnych (φ, ϑ) pochodzących od współrzędnych sferycznych. Współczynniki Christoffela to

$$\Gamma^{\varphi}_{\varphi\varphi} = 0, \;\; \Gamma^{\varphi}_{\varphi\vartheta} = \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\varphi} = \cot\vartheta, \;\; \Gamma^{\varphi}_{\vartheta\vartheta} = 0, \;\; \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\varphi} = -\cos\vartheta\sin\vartheta, \;\; \Gamma^{\vartheta}_{\varphi\vartheta} = \Gamma^{\vartheta}_{\vartheta\varphi} = 0, \;\; \Gamma^{\vartheta}_{\vartheta\vartheta} = 0,$$

Wyznaczymy przesunięcie rownoległe wektora $w = \partial_\vartheta$ wzdłuż 30 równoleżnika, czyli wzdłuż krzywej $t \mapsto (t, \vartheta_0 = \frac{\pi}{3})$. Startujemy z pozycji ($30^oN0^o$E), czyli gdzieś w Algierii. Patrzymy w kierunku wektora $w(t)$ czyli początkowo na południe (w kierunku ∂_ϑ) i jedziemy na wschód. Czy po objechaniu kuli ziemskiej nadal będziemy patrzeć na południe? Okazuje się, że układ równań, który mamy do rozwiązania to

$$\begin{bmatrix} \dot{w}^\varphi \\ \dot{w}^\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cot\vartheta_0 \\ -\sin\vartheta_0\cos\vartheta_0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^\varphi \\ w^\vartheta \end{bmatrix}$$

co dla $\vartheta_0 = \pi/3$ przyjmuje postać

$$\begin{bmatrix} \dot{w}^\varphi \\ \dot{w}^\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w^\varphi \\ w^\vartheta \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie z warunkiem początkowym $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ma postać

$$\begin{bmatrix} w^\varphi \\ w^\vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(t/2) & 2\sqrt{3}\sin(t/2)/3 \\ \sqrt{3}\sin(t/2)/2 & \cos(t/2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

Czyli

$$w^\varphi(t) = 2\frac{\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{t}{2}\right), \quad w^\vartheta(t) = \cos\left(\frac{t}{2}\right),$$

inaczej

$$w(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\partial_\varphi + \cos\left(\frac{t}{2}\right)\partial_\vartheta.$$

Dla $t = 2\pi$, czyli po objechaniu całego równoleżnika dostajemy $w(2\pi) = -\partial_\vartheta$, czyli patrzymy na północ!!! Przesunięcie rownoległe po krzywej zamknietej w M nie musi być krzywą zamknietą w $\mathsf{T}M$. Odstępstwo krzywej horyzontalnej rzutującej sie na krzywą zamkniętą w M od krzywej zamkniętej w $\mathsf{T}M$ mierzy wielkośc zwana krzywizną koneksji (przyszły semestr). ♣

Koneksję na powierzchni zanurzonej skonstruowaliśmy z użyciem iloczynu skalarnego indukowanego z przestrzeni w której zanurzamy. Okazuje się jednak, że zależność od zanurzenia jest dość słaba. Precyzyjniej mówiąc, koneksja zależy jedynie od iloczynu skalarnego obciętego do powierzchni, a nie zależy od tego co dzieje się w kierunkach prostopadłych. Mówi o tym następujący fakt (niezbyt wyrafinowane sformułowanie „Theorema Egregium” Gaussa)

Fakt 1 *Pochodna kowariantna i przesunięcie równoległe na powierzchni zanurzonej mają charakter wewnętrzny, tzn zależą jedynie od iloczynu skalarnego (metryki) indukowanej na powierzchni.*

Dowód: Zaczniemy od wyliczenia $\nabla_v g$, gdzie v jest dowolnym wektorem stycznym do M a g jest formą dwuliniową symetryczną reprezentującą iloczyn skalarny, czyli inaczej tensorem metrycznym na M. Tensor g pochodzi z obcięcia iloczynu skalarnego z $\mathsf{T}A$. W bazie (e_a) macierz g ma postać $g_{ab} = (e_a|e_b)$. Wyrazy macierzowe g_{ab} są stałe, tzn. nie zależą od punktu na powierzchni. Obcięcie iloczynu skalarnego można zapisać także w bazie związanej z układem współrzędnych na powierzchni. Wtedy $g_{ij} = (\partial_i|\partial_j)$. Wyrazy macierzowe g_{ij} są funkcjami współrzędnych (φ^i). W notacji tensorowej iloczyn skalarny zapiszemy jako

$$g = g_{ij}\mathsf{d}\varphi^i \otimes \mathsf{d}\varphi^j.$$

Do tej pory liczyliśmy pochodną kowariantną jedynie pól wektorowych. Można ją jednak rozszerzyć (poprzez regułę Leibniza) na dowolne pola tensorowe. Jak pochodna kowariantna działa na formy (pola kowektorowe)? Niech $\alpha = \alpha_i \mathsf{d}\varphi^i$ będzie polem kowektorowym a $X = X^i\partial_i$ polem wektorowym. Wtedy $\langle \alpha, X\rangle$ jest funkcją na M. Pochodna kowariantna funkcji jest pochodną zwykłą, czyli działaniem wektora stycznego na funkcję

$$\nabla_v\langle \alpha, X\rangle = v^i\partial_i(\alpha_j X^j) = v^i(\partial_i\alpha_j)X^j + v^i\alpha_j(\partial_i X^j). \tag{3}$$

Z drugiej strony, zgodnie z regułą Leibniza powinno być

$$\nabla_v\langle \alpha, X\rangle = \langle \nabla_v\alpha, X\rangle + \langle \alpha, \nabla_v X\rangle = v^i(\nabla_i\alpha)_j X^j + v^i\alpha_j(\partial_i X^j + \Gamma^j_{ik}X^k) \tag{4}$$

Z porównania (3) i (4) wynika, że

$$v^i(\partial_i\alpha_j)X^j = v^i(\nabla_i\alpha)_j X^j + v^i\alpha_j\Gamma^j_{ik}X^k,$$

czyli

$$v^i(\nabla_i\alpha)_k X^k = v^i(\partial_i\alpha_k)X^k - v^i\alpha_j\Gamma^j_{ik}X^k.$$

Ostatecznie

$$(\nabla_i\alpha) = \left(\partial_i\alpha_k - \alpha_j\Gamma^j_{ik}\right)\mathsf{d}\varphi^k. \tag{5}$$

Dalej, korzystając cały czas z reguły Leibniza, otrzymujemy

$$\nabla_i(g_{jk}\mathsf{d}\varphi^j \otimes \mathsf{d}\varphi^k) = (\partial_i g_{jk})\mathsf{d}\varphi^j \otimes \mathsf{d}\varphi^k + g_{jk}\mathsf{d}(\nabla_i\mathsf{d}\varphi^j) \otimes \mathsf{d}\varphi^k + g_{jk}\mathsf{d}\varphi^j \otimes (\nabla_i\mathsf{d}\varphi^k).$$

Wynika z tego, że

$$(\nabla_i g)_{jk} = \partial_i g_{jk} - \Gamma^l_{ij}g_{lk} - \Gamma^l_{ik}g_{jl}. \tag{6}$$

Do obliczenia ∇g wykorzystamy teraz fakt, że tensor metryczny na M pochodzi z obcięcia stałego tensora metrycznego na A. Przypomnijmy oznaczenia, których używalismy wcześniej. Macierz A to macierz przejścia między bazami (e_a) oraz (∂_i, n_α), gdzie ∂_i to oczywiście wektory styczne do M związane z układem współrzędnych a n_α to wektory prostopadłe do M. Dokładniej

$$e_a = A^i_a\partial_i + A^\alpha_a n_\alpha.$$

Macierz odwrotną do A oznaczać będziemy tym razem B, tzn

$$\partial_i = B^a_i e_a, \qquad n_\alpha = B^a_\alpha e_a.$$

Wyrazy macierzowe macierzy A i B zależą od współrzędnych (φ^i) na powierzchni M.

$$g_{jk} = (\partial_j|\partial_k) = (B_j^a e_a|B_k^b e_b) = B_j^a B_k^b g_{ab}$$

Do wzoru (6) wstawiamy wzory wynikające z definicji współczynników Γ z użyciem macierzy A i B oraz powyższe wyrażenie na g_{jk}. „Gammy” zaznaczamy na szaro:

$$\begin{aligned}(\nabla_i g)_{jk} &= \partial_i(B_j^a\, B_k^b\, g_{ab}) - (\partial_i B_j^a)\, A_a^l\, B_l^c\, B_k^d\, g_{cd} - (\partial_i B_k^a)\, A_a^l\, B_j^c\, B_l^d\, g_{cd} = \\ &\partial_i(B_j^a)\, B_k^b\, g_{ab}) + B_j^a\, \partial_i(B_k^b)\, g_{ab} - (\partial_i B_j^a)\, A_a^l\, B_l^c\, B_k^d\, g_{cd} - (\partial_i B_k^a)\, A_a^l\, B_j^c\, B_l^d\, g_{cd}\end{aligned} \tag{7}$$

Zajmiemy sie oddzielnie wyrazami niebieskimi i oddzielnie czerwonymi. Tak naprawdę wystarczy policzyć niebieskie – czerwone są niemal jednakowe.

$$\begin{aligned}&\partial_i(B_j^a)\, B_k^b\, g_{ab}) - (\partial_i B_j^a)\, A_a^l\, B_l^c\, B^d{}_k\, g_{cd} = \partial_i(B_j^a)\, \left(B_k^b\, g_{ab} - A_a^l\, B_l^c\, B^b{}_k\, g_{cb}\right) = \\ &\partial_i(B_j^a) B_k^b \left(g_{ab} - A_a^l B_l^c g_{cb}\right) = \partial_i(B_j^a) B_k^b \left((e_a|e_b) - (A_a^l B_l^c e_c|e_b)\right) = \\ &\partial_i(B_j^a) B_k^b (e_a - A_a^l B_l^c e_c|e_b)\end{aligned}$$

Skoro

$$e_a = A_a^l \partial_l + A_a^\alpha n_\alpha \quad \text{oraz} \quad \partial_l = B_l^c e_c$$

to

$$e_a = A_a^l B_l^c e_c + A_a^\alpha n_\alpha$$

i

$$e_a - A_a^l B_l^c e_c = A_a^\alpha n_\alpha.$$

Kontynuujemy rachunki

$$\begin{aligned}&\partial_i(B_j^a) B_k^b (e_a - A_a^l B_l^c e_c|e_b) = \partial_i(B_j^a) B_k^b (A_a^\alpha n_\alpha|e_b) = \\ &\partial_i(B_j^a)(A_a^\alpha n_\alpha|B_k^b e_b) = \partial_i(B_j^a)(A_a^\alpha n_\alpha|\partial_k) = 0\end{aligned}$$

Okazuje sie, że niebieski fragment wzoru (7) daje 0, czerwony też, więc ostatecznie, dla dowolnego v

$$\nabla_v g = 0.$$

Wypiszemy warunek na współrzędne ∇g permutując cyklicznie wkaźniki

$$\begin{aligned}0 &= (\nabla_i g)_{jk} = \partial_i g_{jk} - \Gamma_{ij}^l g_{lk} - \Gamma_{ik}^l g_{jl} \\ 0 &= (\nabla_j g)_{ki} = \partial_j g_{ki} - \Gamma_{jk}^l g_{li} - \Gamma_{ji}^l g_{kl} \\ 0 &= (\nabla_k g)_{ij} = \partial_k g_{ij} - \Gamma_{ki}^l g_{lj} - \Gamma_{kj}^l g_{il}\end{aligned}$$

Od pierwszego wiersza odejmujemy drugi i trzeci. Korzystamy z symetrii symboli Chrisoffela względem dolnych wkaźników oraz z symetrii tensora metrycznego. Czerwone i niebieskie wyrazy upraszczają się i otrzymujemy

$$0 = \partial_i g_{jk} - \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} + 2\Gamma_{jk}^l g_{li}$$

Wyznaczamy

$$\Gamma_{jk}^m = \frac{1}{2} g^{im} \left(\partial_j g_{ki} + \partial_k g_{ij} - \partial_i g_{jk}\right). \tag{8}$$

Rys. 1: Tullio Levi-Civita, (1873-1941)

Okazało się, że symbole Christoffela zawierające pełną informację o koneksji, dają się wyrazić przez współczynniki metryki i ich pochodne w kierunkach stycznych do powierzchni. Istotnie więc, koneksja jest wewnętrznym obiektem geometrycznym na powierzchni zanurzonej.□

Wzór (8) jest bardzo ważny. My wyprowadziliśmy go dla koneksji zdefiniowanej na powierzchni zanurzonej w przestrzeni afinicznej z iloczynem skalarnym. Okazuje się, że pozostaje on prawdziwy w ogólniejszej sytuacji. Prawdziwe jest twierdzenie (T. Levi-Civita), które mówi, że na rozmaitości z metryką g istnieje dokładnie jedna koneksja symetryczna (tzn. taka, dla której symetryczne są symbole Christoffela) i zgodna ze strukturą metryczną. Zgodność ze strukturą metryczną oznacza właśnie, że $\nabla g = 0$. Koneksja taka nazywa się koneksją metryczną lub koneksją Levi-Civity. Nasz fakt 1 mozna by zatem sformułować inaczej: *Pochodna kowariantna zdefiniowana wzorem (**??**) pochodzi od koneksji metrycznej związanej z metryką na A obciętą do M.*