Tematy do samodzielnego opracowania na egzamin z GRII

(1) **Generowanie podozmaitości lagranżowskich w wiązce kostycznej za pomocą rodziny funkcji.** Omawiając temat należy powiedzieć w jaki sposób otrzymuje się podrozmaitość z rodziny funkcji i jakie warunki musi spełniać ta rodzina. Dobrze by było także podać jakiś, przynajmniej jeden, przyład podrozmaitości, której nie da się wygenerować w inny sposób. Można poszukać przykładów w $T^*\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^4$. *Paulette Liebermann, Charles-Michel Marle "Symplectic Geometry and Analyticl Mechanics"*

(2) **Kanoniczny izomorfizm między T^*E i T^*E^* dla wiązki wektorowej $E \to M$** Izomorfizm o którey chodzi jest relacją symplektyczną generowaną przez parowanie kowektorów i wyktorów. Trzeba zatem wiedzieć coś o elacjach symplektycznych oraz o gennerowaniu podrozmaitosci lagranżowskiej z funkcji na podrozmaitości. Trzeba wspomnieć takze, że, zleżnie od konwencji, ten izomorfizm może być symplektoomorfizmem bądź antysymplektomorfizmem.

(3) **Równania fazowe dla lagranżjanu** $L = E - V$, gdzie oczywiście E jest energią kinetyczną związaną z metryką a V potencjałem zależnym od punktu na rozmaitości. Zadanie polega na wyprowadzeniu rownań fazowych z lagranżjanu przy poomocy α_M i pokazaniu, że w tym przypadku rownania te pochodzą od hamiltoniiwskiego pola wektorowego.

(4) **Wiązki dualne do podwójnych wiązek wektorowych.** Startując z podwójnej wiązki wektorowej można „wziąc wiązkę dualną" ze wzgledu na każdą ze struktur. Zadanie polega na pokazaniu, że otrzymana wiązka jest także podwójną wiazką wektorową oraz na wskazaniu jej rzutów i jądra. Szczególnie szczegółowo należy omowic wiązki dualne do $TE \to E$ i $TE \to TM$. `arXiv:dg-ga/9710014`

(5) **Struktura symplektyczna w TT^*M.** Ta iterowana wiązka jest rozmaitością symplektyczną. Zadanie polega na omówieniu jej struktury symplektycznej: skąd się bierze, jak się zapisuje na współrzędnych, że wykres pola hamiltonowskiego jest podrozmaitością lagranżowską. Struktura symplektyczna o której mowa może być otrzymaja oczywiście przez cofniecie przy pomocy α_M lub β_M, ale moze także być podniesiona z T^*M. Podnosimy raczej formę Liouville'a θ_M. Jeśli potraktujemy θ_M jako odwzorowanie z T^*M do T^*T^*M to podniesiona forma $d_T\theta_M$ jest dana wzorem $d_T\theta = \alpha_{T^*M} \circ T\theta_M$. Forma $d_T\omega_M$ jest różniczką $d_T\theta_M$. Opisana tu procedura jest ogólna: jak podnieśc jednoformę φ na rozmaitości N do jednoformy na wiązce stycznej TN? Należy zastosować funktor styczny T i zlożyć z α_N, tzn $d_T\varphi = \alpha_N \circ T\varphi$.