

Ćwiczenia z Analizy I R (listopad 2)

Rachunek różniczkowy - początek

Zadanie 1. Rozgrzewka: Obliczyć całki nieoznaczone, tzn znaleźć funkcje pierwotne. W nawiasach wymienione są narzędzia jakie mogą być potrzebne przy rozwiązywaniu

(a) $\int (x^2 - 2x + 3)e^x dx$ (całkowanie przez części lub zgadywanie);

(b) $\int \sin^3 x dx$ (podstawienie);

(c) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ (suma Fouriera);

(d) $\int \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$ (całkowanie przez części, podstawienie);

(e) $\int x^{-\frac{3}{2}} \log(1 + \sqrt{x}) dx$ (całkowanie przez części, podstawienie, albo podstawienie i po drodze ułamki proste...)

Zadanie 2. Całkowanie funkcji wymiernych: rozkładamy na ułamki proste postaci

$$\frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Ax+B}{(x^2+a^2)^k}.$$

Trudniejsze jest tylko całkowanie wyrażeń z wielomianem kwadratowym w wyższej potędze w mianowniku

(a) $\int \frac{2x^4 - x^2 + 1}{x^3 - x} dx$ (b) $\int \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3(x-4)} dx;$

(c) $\int \frac{1}{x^4 - 1} dx$ (d) $\int \frac{x^4 + 2x^2 + 4}{(1+x^2)^3} dx;$

(e) $\int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2} dx;$

Zadanie 3. Funkcje wymierne od trygonometrycznych:

(a) $\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} dx;$ (b) $\int \frac{1}{\sin x \sin 2x} dx;$ (c) $\int \frac{2 \operatorname{tg} x + 3}{\sin^2 x + 2 \cos^2 x} dx$

Zadanie 4. Wyrazić $F_{n+1}(x)$ przez $F_n(x)$

$$(a) F_n(x) = \int \left(\frac{x^2}{(1+x^2)} \right)^n dx; \quad (b) F_n(x) = \int \frac{1}{x(1+x^2)^n} dx, \text{ wyliczyć } F_4(x)$$

Zadanie 5. Dalsze ćwiczenia (część na zajęciach, a część w domu, niektóre są trudne)

- | | |
|---|---|
| (a) $\int \frac{\log 1-x }{x^{n+1}} dx;$ | (b) $\int \left(\frac{x}{\arctg x} - 1 \right)^{-2} dx;$ |
| (c) $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1};$ | (d) $\int \frac{(x^2-1)dx}{x^4+1};$ |
| (e) $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^4+1};$ | (f) $\int \operatorname{tg}^2 x dx;$ |
| (g) $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)};$ | (h) $\int \frac{1}{x^2} \arcsin x dx;$ |
| (i) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt{1-x^3}};$ | (j) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n+1}};$ |
| (k) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-1}};$ | (l) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1+x^4}};$ |
| (m) $\int \frac{x dx}{x^3+1};$ | (n) $\int \frac{x dx}{\cos^2 x};$ |
| (o) $\int \sin(\log x) dx;$ | (p) $\int \frac{\operatorname{tg} 2x dx}{2-3\cos^2 x};$ |
| (q) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2+\cos 2x}};$ | (r) $\int \frac{\sin x \cos^3 x dx}{2+\sin^2 x};$ |
| (s) $\int e^{-x} \frac{x^n}{n!} dx;$ | (t) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+x}};$ |
| (u) $\int \frac{dx}{1+x+\sqrt{x^2+x}};$ | (w) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-x^2}};$ |
| (x) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-x^2}};$ | (y) $\int \sqrt{e^{2x}+2e^x}$ |

