Analiza I R

grudzień 2

Podstawienia Eulera Podstawienie Eulera służą do znajdowania funkcji pierwotnych do funkcji postaci $f(x) = R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$, gdzie R jest wymierną funkcją dwóch zmiennych. Chodzi o to, żeby funkcję zawierającą pierwiastek sprowadzić do funkcji wymiernej. Jeśli oznaczymy $y := \sqrt{ax^2+bx+c}$ sprowadza się to do sparametryzowania fragmentu krzywej

$$x \mapsto (x, \sqrt{ax^2+bx+c}) \in \mathbb{R}^2$$

dla $y > 0$ parametrem t w taki sposób, aby $x(t)$ i $y(t)$ były wymierne.

(1) Pierwsze podstawienie Eulera działa gdy $a > 0$, podstawiamy $y = \sqrt{a}x + t$. Wyznaczamy $x(t)$, $y(t)$ i $dx = x'(t)dt$;
(2) Drugie podstawienie Eulera działa gdy $c > 0$, podstawiamy $y = tx + \sqrt{c}$;
(3) Trzecie podstawienie Eulera działa gdy łatwo jest wybrać punkt (x_0, y_0) na krzywej, tzn $y_0 = \sqrt{ax_0^2 + bx_0 + c}$, podstawiamy $y - y_0 = t(x - x_0)$. Prowadząc rachunki warto zapisać y^2 w potęgach $x - x_0$ zamiast x.

Zadanie polega na obliczeniu trzema sposobami całki nieoznaczonej

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}} \quad \text{oraz jej wersji oznaczonej} \quad \int_0^1 \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

Podstawienia trygonometryczne i hiperboliczne dla całek z pierwiastkami. Gdy funkcja podcałkowa ma postać $f(x) = R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$ można spróbować pozbyć się pierwiastka stosując podstawienia trygonometryczne lub hiperboliczne. Obliczcie poniższe całki używając wskazanych podstawień i zastanówcie się w jaki sposób powinno się decydować, którego z podstawień mozna i warto użyć w konkretnym przypadku:

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+b^2}} \qquad x = b\,\mathrm{tg}\,t, \ \text{dwa przypadki } 0 < a < b, \ 0 < b < a;$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2}, \qquad x + 1 = \mathrm{tg}\,t;$$

$$\text{całka jak wyżej,} \qquad x + 1 = \sinh t;$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{5 + 3\sqrt{1-x^2}}, \qquad x = \sin t.$$

Jako zadanie dodatkowe proszę zapisać funkcje odwrotne do sinh i cosh z użyciem logarytmów.

Definicja całki Riemanna oraz różne całki oznaczone. Rozważając sumy Riemanna odpowiednio dobranych całek wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}, \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{kn} \right) = \log k, \ \mathbb{N} \ni k \geqslant 2$$

Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi (wybrać dwa punkty spośród poniższych)

(a) $y = x^2, \quad y = \frac{1}{2}x^2, \quad y = 3x,$

(a) $y = e^{3x}, \quad y = e^{-x}, \quad y = \sqrt{e},$

(a) $y^2 = -x, \quad y = x + 6,$

(a) $y = \operatorname{arc\,tg} x, \quad y = \operatorname{arc\,ctg} x, \quad y = 0.$

Różne całki oznaczone. Wybierzemy kilka całek oznaczonych i policzymy je. Im więcej tym lepiej. Im trudniejsze tym lepiej

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} dx;$

(b) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\operatorname{tg}^p x}$ dla $p \in \mathbb{R};$

(c) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\, dx;$

(d) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}};$

(e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{3+2\cos x};$

(f) $\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx;$

(g) $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}};$

(h) $\displaystyle\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx,\ m, n \in \mathbb{N},\ a < b;$

(i) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n dx,\ n \in \mathbb{N};$

(j) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+4x^2} dx;$

(k) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin^2 x};$

(l) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{1+2\sin x(\sin x + \cos x)};$

(m) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^n x \cos nx\, dx;$

(n) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{\sin x} dx,\ n \in \mathbb{N}.$