I kolokwium z Analizy IR
2 grudnia 2013

Uwagi organizacyjne: każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce. Każde zadanie należy podpisać imieniem i nazwiskiem własnym oraz prowadzącego ćwiczenia. Na wszelki wypadek prosimy też o podanie numeru grupy. Prosimy o sprawdzenie, czy telefon komórkowy jest wyłączony a kalkulator i inne pomoce naukowe (np. tablice matematyczne) schowane. W razie wątpliwości prosimy o kontakt z asystentem.

Zadanie 1. Niech $X := [-1,1]$ oraz $R := \{(x,y) \in X \times X : x - y \in \mathbb{Z} \text{ lub } x + y + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}\}$. Sprawdzić, że R jest relacją równoważności w zbiorze X, znaleźć jawną postać klas: $[\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{4}]$ oraz narysować zbiór R.

Zadanie 2. W przestrzeni metrycznej (X,d) dany jest ciąg $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niepustych zbiorów zwartych spełniający warunek $K_{n+1} \subset K_n$. Wykazać, że przecięcie $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ jest niepuste.

Zadanie 3. Zbadać zbieżność i ewentualnie obliczyć granicę ciągów:

$$\text{(a)} \quad y_{n+1} = \frac{y_n + 2}{y_n + 1}, \ \ y_0 > 0 \qquad \text{(b)} \quad t_n = \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n}) \cdots (1 + \frac{n}{n})$$

Zadanie 4. Udowodnić nierówność

$$\frac{x}{e^x - 1} \geqslant \frac{2}{e^x + 1}, \quad \text{dla} \quad x \neq 0.$$

I kolokwium z Analizy IR
2 grudnia 2013

Uwagi organizacyjne: każde zadanie rozwiązujemy na osobnej kartce. Każde zadanie należy podpisać imieniem i nazwiskiem własnym oraz prowadzącego ćwiczenia. Na wszelki wypadek prosimy też o podanie numeru grupy. Prosimy o sprawdzenie, czy telefon komórkowy jest wyłączony a kalkulator i inne pomoce naukowe (np. tablice matematyczne) schowane. W razie wątpliwości prosimy o kontakt z asystentem.

Zadanie 1. Niech $X := [-1,1]$ oraz $R := \{(x,y) \in X \times X : x - y \in \mathbb{Z} \text{ lub } x + y + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}\}$. Sprawdzić, że R jest relacją równoważności w zbiorze X, znaleźć jawną postać klas: $[\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{4}]$ oraz narysować zbiór R.

Zadanie 2. W przestrzeni metrycznej (X,d) dany jest ciąg $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niepustych zbiorów zwartych spełniający warunek $K_{n+1} \subset K_n$. Wykazać, że przecięcie $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ jest niepuste.

Zadanie 3. Zbadać zbieżność i ewentualnie obliczyć granicę ciągów:

$$\text{(a)} \quad y_{n+1} = \frac{y_n + 2}{y_n + 1}, \ \ y_0 > 0 \qquad \text{(b)} \quad t_n = \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n}) \cdots (1 + \frac{n}{n})$$

Zadanie 4. Udowodnić nierówność

$$\frac{x}{e^x - 1} \geqslant \frac{2}{e^x + 1}, \quad \text{dla} \quad x \neq 0.$$