CO ROBILIŚMY PO KOLOKWIUM

1. zbadać przebieg i naszkicować wykres funkcji

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$$

podobnie wygląda

$$\varphi(x) = \arcsin\left(\frac{3x - x^3}{(1+x^2)^{3/2}}\right)$$

2. ZLECENIE WYKŁADOWCY

wykazać, że reszta w postaci Lagrange'a w rozwinięciu funkcji $x \longmapsto e^x$ w szereg wokół $x_0 = 0$ znika dla $n \to \infty$ i dowolnego x.

3. Obliczyć następujące pochodne

$f^{(10)}(0)$ dla $f(x) = x^2 \cos x$

$g^{(100)}(0)$ dla $g(x) = \dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 2x + 1}$

$h^{(n)}(3)$ dla $h(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{5-x}}$

4. Niech $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ będzie dwukrotnie różniczkowalna

$$M_k := \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| f^{(k)}(x) \right| \quad k = 0, 1, 2$$

Udowodnić, że jeśli M_0 i M_2 są skończone to

$$M_1 \leq \sqrt{2 M_0 M_2}$$

ZADANIE 1

Kolokwium:

$X = [-1, 1]$

$R = \{(x, y) \in X \times X : \ x - y \in \mathbb{Z}$ lub $x + y + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}\}$

Sprawdzamy, że R jest relacją równoważności:

1) Relacja równoważności jest zwrotna:
istotnie $(x, x) \in R$ gdyż $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$

2) Relacja równoważności jest symetryczna:
jeśli $x - y \in \mathbb{Z}$ to także $y - x \in \mathbb{Z}$, podobnie jeśli $x + y + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ to także $y + x + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$

3. Relacja równoważności jest przechodnia:

Rozważamy przypadki:

A

$x-y \in \mathbb{Z}$ i $y-z \in \mathbb{Z}$, wtedy

oczywiście także $x-z \in \mathbb{Z}$

bo $x-z = (x-y)+(y-z)$

B

$x-y \in \mathbb{Z}$ i $y+z+\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$, wtedy

$$x+z+\frac{1}{2} = x-y+y+z+\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$$

C

$x+y+\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ i $y+z+\frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$, wtedy

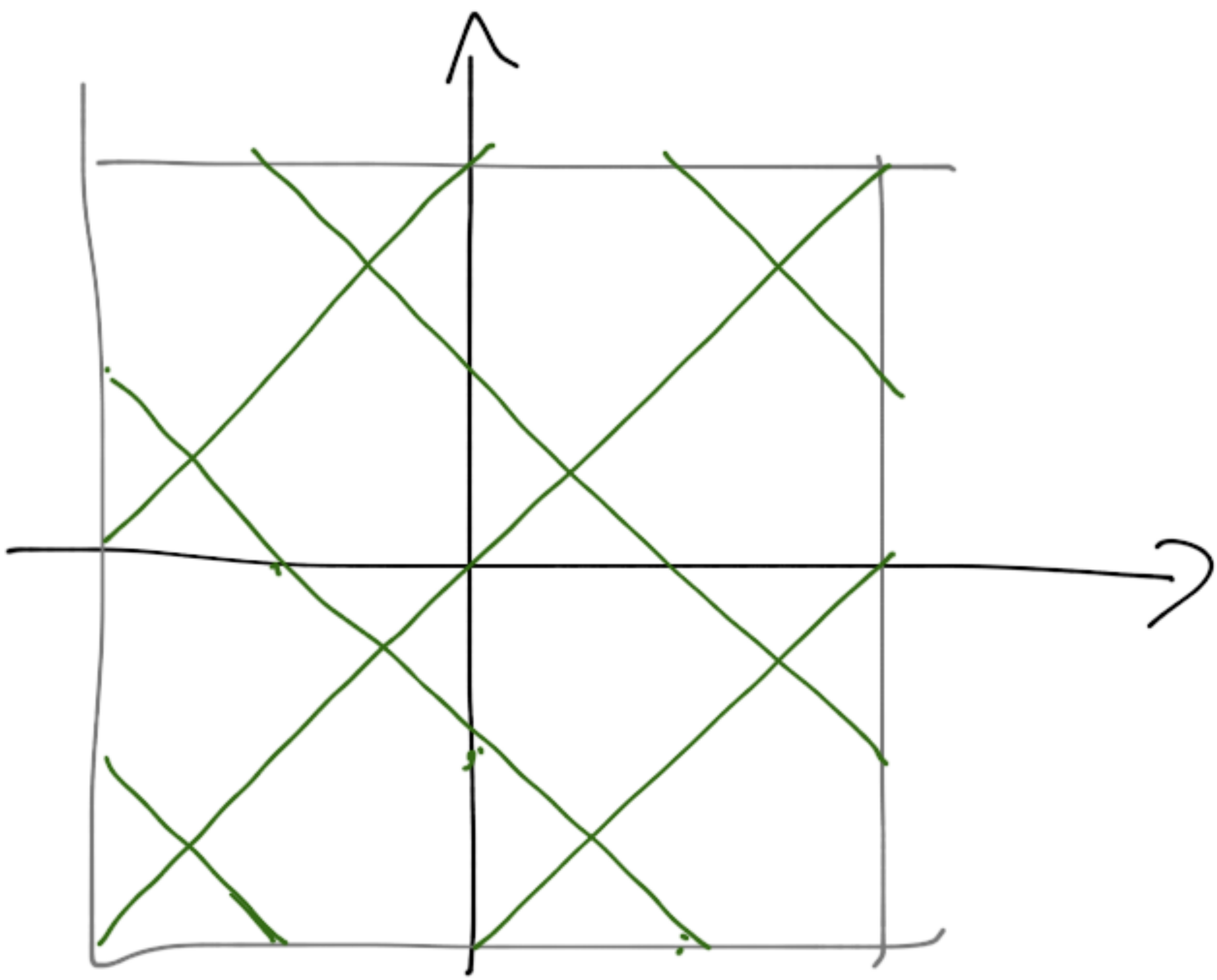
$$(x-z) = \left(x+y+\frac{1}{2}\right) - \left(y+z+\frac{1}{2}\right) \in \mathbb{Z}$$

Warunek (3) jest więc spełniony

Rysujemy $\mathcal{R}$:

$$x - y = k \implies y = x + k'$$

$$x + y + \frac{1}{2} = l \quad y = -x - \frac{1}{2} + l$$



$$\left[\tfrac{1}{2}\right] : -\tfrac{1}{2}$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}+1},\quad \tfrac{1}{2}-1,\quad \cancel{\tfrac{1}{2}-2}$$

$$y = x + k$$

$$y = -x - \tfrac{1}{2} + l$$

$$-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + 0 = -1$$

$$-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + 1 = 0$$

$$-\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} + 2 = 1$$

$$\left[\tfrac{1}{2}\right] = \left\{-1, -\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, 1\right\}$$

$\left[\frac{1}{3}\right]$

$y = x + k$:

$\cancel{\frac{1}{3} - 2 = -\frac{5}{3}}$, $\frac{1}{3} - 1 = -\frac{2}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\cancel{\frac{1}{3} + 1}$

$y = -x - \frac{1}{2} + k$

$\cancel{-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 1 = -\frac{11}{6}}$, $-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 0 = -\frac{5}{6}$,

$-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{6}$, $\cancel{-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 = \frac{7}{6}}$

$\left[\frac{1}{3}\right] = \left\{-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right\}$

$[1/4]$

$y = x + k$

$\frac{1}{4} - 1 = -3/4$, $\frac{1}{4}$, $\cancel{\frac{1}{4}+1}$

$y = -x - 1/2 + l$

$-1/4 - 1/2 = -3/4$, $-1/4 - 1/2 + 1 = 1/4$,

$\left[\frac{1}{4}\right] = \left\{-3/4 , 1/4\right\}$

ZADANIE 2

Zbiory K_n są niepuste, zatem mogę wybrać z każdego zbioru jeden element tworząc ciąg: $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Ponieważ $\forall n \; K_n \subset \underline{K_1}$ ciąg (x_n) jako ciąg w zbiorze zwartym zawiera podciąg zbieżny x_{n_k}. Granicę tego podciągu oznaczmy g.

Pokażemy, że $g \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$

Zauważmy, że jeśli x_{n_k} jest

elementem podciągu to wszystkie elementy podciągu leżą w K_{n_k}, który jest domknięty, więc $g \in K_{n_k}$. Oznacza to także, że $g \in K_l$ dla $l < n_k$. Ustalmy teraz $l \in \mathbb{N}$. Wiadomo, że $\exists\, k$: $n_k > l$ zatem $g \in K_l$. W ten sposób pokazaliśmy, że $g \in K_l$ dla $l \in \mathbb{N}$, czyli

$$g \in \bigcap_{l \in \mathbb{N}} K_l \quad \square.$$

ZADANIE 3

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n+1}\right)\left(1+\frac{n+1}{n+1}\right)}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)} =$$

$$= \frac{n}{n+1}\left(\frac{\frac{\cancel{n+2}}{n+1}\cdot\frac{\cancel{n+3}}{n+1}\cdots\frac{2n+1}{n+1}\cdot\frac{2n+2}{n+1}}{\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\cancel{n+2}}{n}\cdots\frac{\cancel{n}}{n}}\right) =$$

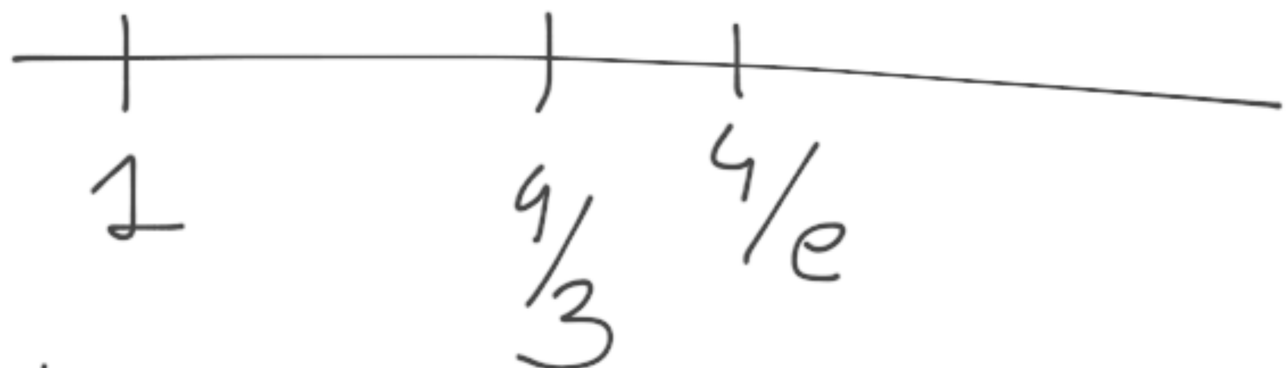
$$= \frac{n}{n+1}\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{(2n+1)\overbrace{\cancel{(2n+2)}}^{2}}{\cancel{n+1}} =$$

$$= 2\,\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\Big\downarrow{\scriptstyle n\to\infty}$$

$$4/e > 1$$



$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > 4/3$$ dla dużych n, tzn $n > N_0$

$$x_{n+1} > \frac{4}{3} x_n > \left(\frac{4}{3}\right)^2 x_{n-2} > \dots$$

$$\dots \left(\frac{4}{3}\right)^{n-N_0} x_{N_0}$$

$$\downarrow_{n \to \infty}$$

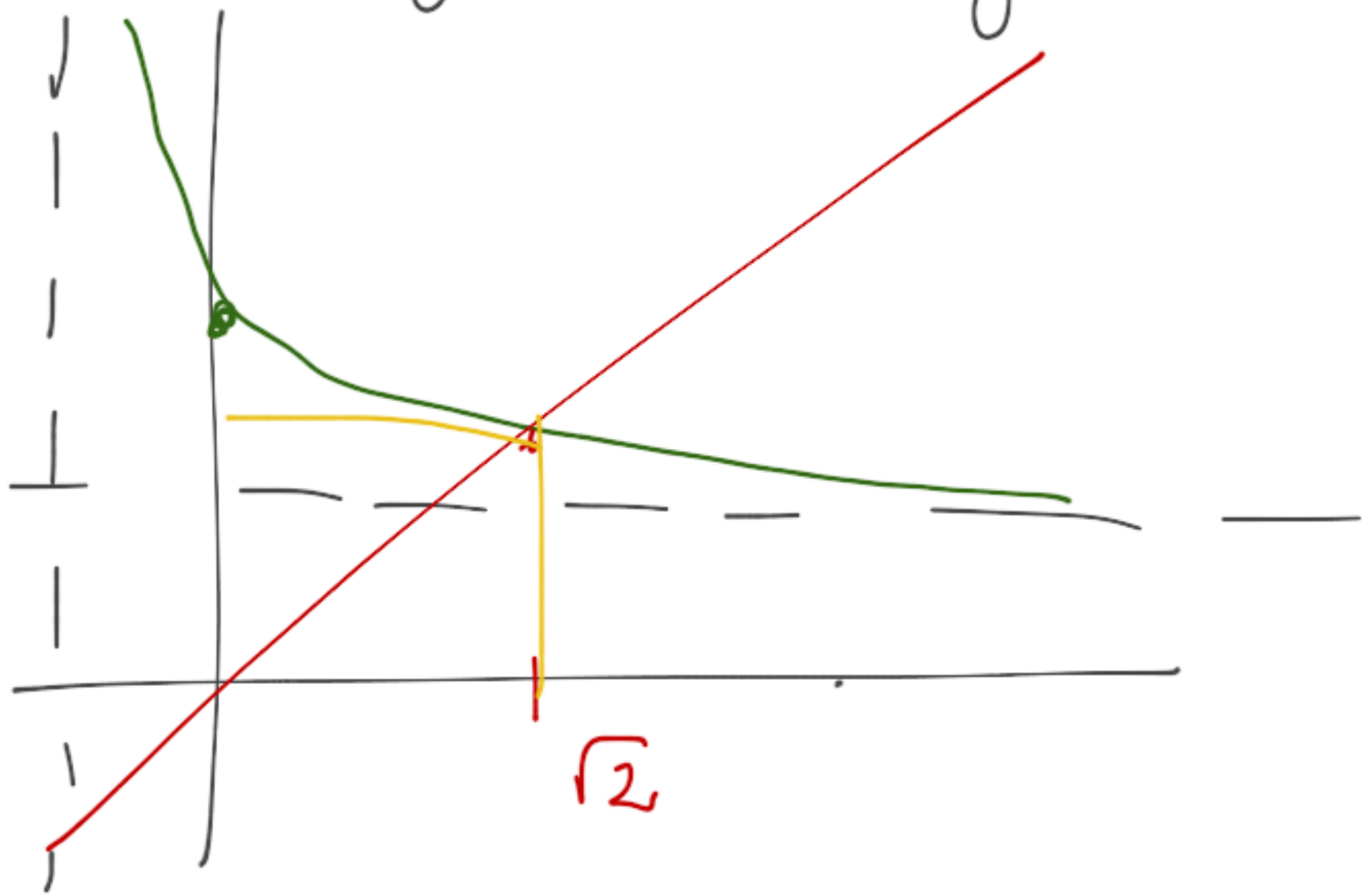
$$\infty \qquad \lim_{n \to \infty} x_n = \infty$$

(a) $$y_{n+1} = \frac{y_n + 2}{y_n + 1}$$

$$y = \frac{y+2}{y+1} \qquad y(y+1) = y+2$$

$$\ell^2 + \ell = \ell + 2 \qquad \ell^2 = 2 \qquad \ell = \pm\sqrt{2}$$

$$f(y) = \frac{y+2}{y+1} = 1 + \frac{2}{y+1}$$



$f([0,\sqrt{2}]) \subset [\sqrt{2}, 2]$

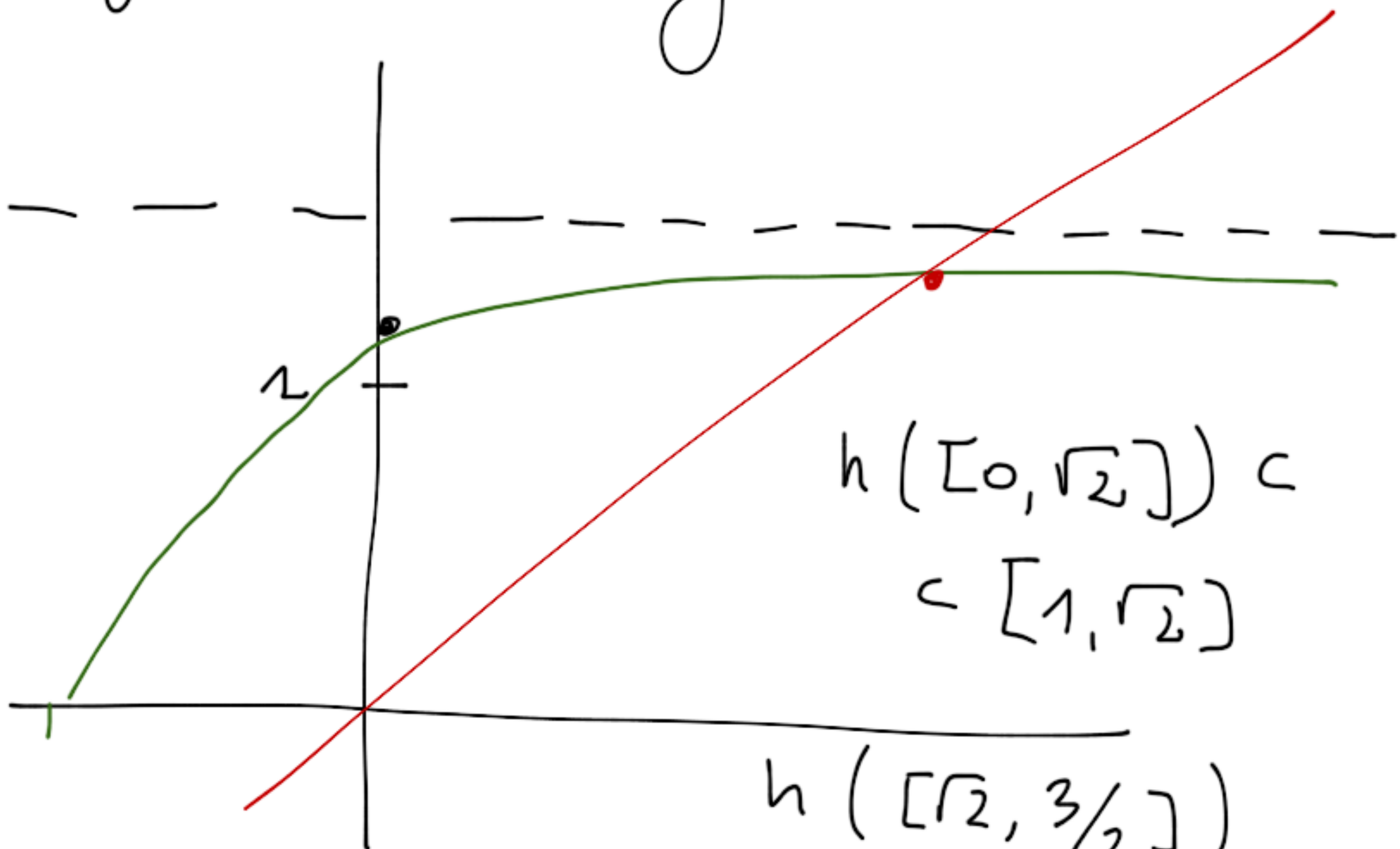
$f([\sqrt{2}, 2]) \subset [1, \sqrt{2}]$

– ciąg oscylujący, ograniczony.

badamy $f \circ f$

$$f \circ f(y) = \frac{\frac{y+2}{y+1} + 2}{\frac{y+2}{y+1} + 1} = \frac{3y+4}{2y+3}$$

$$\frac{3y+4}{2y+3} = \frac{3}{2} + \frac{-1/2}{2y+3} \qquad h = f \circ f$$



$$h([0,\sqrt{2}]) \subset$$
$$\subset [1,\sqrt{2}]$$

$$h([\sqrt{2}, 3/2])$$

W przedziale $[0, \sqrt{2}]$ ciąg rosnący a w przedziale $[\sqrt{2}, \infty[$ malejący.

Podciągi parzysty i nieparzysty są więc zbieżne (ograniczone i monotoniczne) do tej samej granicy równej $\sqrt{2}$.

ZADANIE 4

$$\frac{x}{e^x-1} \geqslant \frac{2}{e^x+1} \qquad x>0$$

$$x(e^x+1) \geqslant (e^x-1)\cdot 2$$

$$xe^x + x \geqslant 2e^x - 2$$

$$\underbrace{(x-2)e^x + x + 2}_{f(x)} \geqslant 0$$

$$f(0) = -2+2=0$$

$$f'(x) = e^x + e^x(x-2)+1 =$$

$$= e^x(1+x-2)+1 =$$

$$= e^x(x-1)+1$$

$e^x(x-1)+1=f'(x)$

$f'(0)=0$

dla $x>0$

$f''(x)=e^x(x-1)+e^x=$

$=xe^x-e^x+e^x=xe^x$

dla $x>0$ $f''(x)>0$

zatem $f'(x)$ rosnąca

znaczy dodatnie (bo

$f'(0)=0$ $\Rightarrow$ $f(x)$ rosnąca

czyli $f(x)>0$ dla $x>0$.

dla $x<0$ mamy udowodnić

że $f(x) < 0$, bo $e^x - 1 < 0$

czyli kierunek nierówności

się odwraca.

dla $x < 0$ $f''(x) < 0$ czyli

f' maleje, zatem jest

dodatnia. Wynika z tego,

że f rośnie, zatem

jest ujemna! $\square$.