ZADANIE 1: Niech $V = \mathbb{K}^3$. Sprawdzić, że formy liniowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ dane wzorami

$$\varphi_k\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}\right) = x^1 + x^2 + x^3 - 2 \cdot k \cdot x^k$$

tworzą bazę w V^*. Znaleźć macierz operatora $F^* \in End(V^*)$ w tej bazie, jeśli $F \in End(V)$ dany jest wzorem

$$F\left(\begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^2 \\ x^3 \\ x^1 \end{bmatrix}.$$

ZADANIE 2 Niech $P \in End(V)$ będzie rzutem. Oznaczymy także $V_0 = \ker P$, $V_1 = \operatorname{im} P$. Dla $F \in End(V)$ wykazać równoważność warunków

(1) $F(V_1) \subset V_0$ i $F(V_0) \subset V_1$

(2) $FP + PF = F$

ZADANIE 3: Znaleźć sygnaturę oraz bazę diagonalizującą dla formy kwadratowej q na $\mathbb{R}^4$:

$$q(x^1, x^2, x^3, x^4) = x^1x^2 + x^2x^3 + x^3x^4 + x^4x^1$$

ZADANIE 4: Niech $a, b, c \in \mathbb{R}$ będą różne od zera. Znaleźć wartości własne macierzy

$$F = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{bmatrix}$$

Otrzymany wynik uogólnić na $F \in End(\mathbb{R}^n)$ $F = \begin{bmatrix} a^1 \\ \vdots \\ a^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^1 & \dots & a^n \end{bmatrix}$ $a^i \neq 0$

Wskazówka: Przypadek $V = \mathbb{R}^3$ można pracowicie liczyć, a można też zauważyć, że $F = w \otimes \varphi$ gdzie $\varphi \in \mathbb{R}_3$ $\varphi = [a\ b\ c]$ $w \in \mathbb{R}^3$ $w = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$, $F(v) = \varphi(v) \cdot w$ Wiadomo wtedy jakie jest $\ker F$ i $\operatorname{im} F$. Łatwo też F zapisać w nowej bazie. Jeśli e jest bazą kanoniczną to f można wziąć np $f = (w, e_2, e_3)$. W bazie f łatwiej się liczy. Łatwiej też uogólnić!

ZADANIE 5: Znaleźć rozkład przestrzeni $\mathbb{R}^3$ na sumę prostą podprzestrzeni niezmienniczych dla macierzy $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$