# Analiza I R (2014/2015)

Kolokwium pierwsze, przykładowe

**Zadanie 1.** Wykazać, że wzór

$$d(x,y) := \min(|x-y|, \Im(x+y))$$

określa metrykę w zbiorze $\mathcal{H} = \{z \in \mathbb{C} : \Im(z) > 0\}$. Wykazać także, że ciąg $z_n = n + \frac{i}{n}$ spełnia warunek Cauchy'ego w tej metryce, ale jest rozbieżny. Uzasadnić, że metryka $d$ i metryka euklidesowa nie są równoważne ale określają w $\mathcal{H}$ tę samą topologię.

**Zadanie 2.** Dwa ciągi liczbowe $(x_n)$ i $(y_n)$ spełniają warunek $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, przy czym jeden z nich jest (słabo) rosnący a drugi (słabo) malejący. Dowieść, że oba są zbieżne a ich granice równe.

**Zadanie 3.** Niech $X = [-1, 1]$ oraz

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in X \times X : \ x - y \in \mathbb{Z} \ \text{ lub } \ x + y + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}\}.$$

Sprawdzić, że $\mathcal{R}$ jest relacją równoważności w zbiorze $X$, narysować $\mathcal{R}$ i znaleźć jawną postać klas $\left[\frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{1}{4}\right]$.

**Zadanie 4.** Obliczyć granicę lub wykazać rozbieżność ciągu liczbowego

$$a_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{n^n + (n+1)^n + \cdots + (n+n)^n}$$

$$b_n = \sqrt{n + \sqrt{n} + 1} - \sqrt[4]{n^2 + n + 1}$$

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n}}\right)$$

**Zadanie 5.** W przestrzeni $\mathbb{R}$ ze zwykłą topologią dany jest zbiów

$$A = \left\{\frac{n}{m+n} + \frac{p}{m+n+p} : \ m, n, p \in \mathbb{N}\right\}.$$

Znaleźć kresy zbioru $A$ oraz określić czy jest on otwarty, domknięty, zwarty, spójny.

*Zadania pochodzą z pierwszego kolokwium z Analizy w roku 1998. Zadanie 1. było obowiązkowe, spośród pozostałych należało wybrać trzy.*