Ćwiczenia z Analizy I R (listopad 1)

Topologia, ciągłość, ODZSy

Zadanie 1. sprawdzić, że funkcja $d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$ określa metrykę na $\mathbb{R}$. Czy metryka ta jest równoważna metryce $\rho(x,y) = |x-y|$? Czy topologia zadawana przez d jest taka sama jak topologia zadawana przez ρ?

Zadanie 2. opisać otwarte, domknięte, zwarte, spójne podzbiory $\mathbb{N}$ z topologią zadaną przez metrykę $d(n,m) = |\frac{1}{n} - \frac{1}{m}|$

Zadanie 3. Zbadać czy zbiór A zawarty w przestrzeni metrycznej (X,d) jest **O**twarty, **D**omknięty, **Z**warty, **S**pojny:
(a) X - przestrzeń ciągów liczbowych z odległością $d((x_n),(y_n)) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n|$, A - zbiór ciągów zbieżnych do zera.
(b) $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) = |x-y|$, $A_p = \{t \in \mathbb{R} :\ 2t^2 - 3t \leqslant pe^t\}$ (w zależności od prarametru p).

Zadanie 4. Wykazać, że wykres odwzorowania ciągłego jest zbiorem domkniętym. Znaleźć kontrprzykład pokazujący, że twierdzenie odwrotne nie zachodzi. Wykazać, że twierdzenie odwrotne zachodzi, jeśli założymy dodatkowo, że przeciwdziedzina odwzorowania o którym mowa jest przestrzenią zwartą.

Zadanie 5. Wykazać, że jeśli $X = [a,b[\subset \mathbb{R}$ ($b = +\infty$ jest dopuszczalne), to każda ciągła surjekcja $f : X \to X$ ma punkt stały.

Zadanie 6. Wykazać, że jeśli $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz f-obraz każdego zbioru otwartego jest domknięty, to f jest stała.

Zadanie 7. Dowieść, że :

(a) jeśli podzbiory A i B przestrzeni $\mathbb{R}^n$ są zwarte, to zbiór $A+B := \{a+b\ :\ a \in A\,,\ b \in B\}$ też jest zwarty;

(b) jeśli A jest zwarty, a B domknięty, to $A+B$ jest domknięty. Podać przykład domkniętych podzbiorów $A, B \subset \mathbb{R}^2$, dla których zbiór $A+B$ nie jest domknięty.

Zadanie 8. Wykazać, że jeżeli X i Y są przestrzeniami metrycznymi, a $f : X \to Y$ – odwzorowaniem, to następujące warunki są równoważne:

(a) f jest ciągłe (tzn. przeciwobrazy zbiorów otwartych w Y są otwarte w X);

(b) przeciwobrazy zbiorów domkniętych w Y są domknięte w X;

(c) $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$ dla każdego podzbioru $A \subset X$.

Zadanie 9. Zbadać ciągłość funkcji

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases},$$

Zadanie 10. Podać przykład funkcji rzeczywistej nieciągłej w punktach wymiernych a ciągłej w niewymiernych.