

## Ćwiczenia z Analizy I R (listopad 2)

*Rachunek różniczkowy - początek*

**Zadanie 1.** Znaleźć jawne wyrażenie na  $n$ -tą pochodną funkcji

$$f(x) = \frac{2x+3}{x^2-5x+6}, ]x \neq 2, 3; \quad g(x) = \arctg x; \quad h(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}, x < 1.$$

**Zadanie 2.** Wykazać, że jeśli  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  jest różniczkowalna i ma ograniczoną pochodną to jest jednostajnie ciągła.

**Zadanie 3.** Zbadać różniczkowalność funkcji

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}; \quad g(x) = \begin{cases} 2^{-n} & x = \frac{m}{n}, \quad m, n \text{ względnie pierwsze} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

**Zadanie 4.** Obliczyć  $f'(0)$ ,  $f''(0)$  i pokazać, że  $f'''(0)$  nie istnieje dla  $f(x) = |x|^{\frac{3}{2}}$ .

**Zadanie 5.** Pokazać, że  $n$ -ta pochodna funkcji  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ ,  $x \neq 0$  jest postaci  $f^{(n)}(x) = \frac{1}{x^{3n}} P_n(x) f(x)$  gdzie  $P_n$  jest wielomianem stopnia  $2n - 2$  spełniającym związek  $P_{n+1}(x) = (2 - 3nx^2)P_n(x) + x^3 P_n'(x)$ . Wykazać, że jeśli położymy  $f(0) = 0$  to powstała funkcja ma pochodne wszystkich rzędów w  $x = 0$ .

**Zadanie 6.** Wykazać, że funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna, lecz jej pochodna jest nieciągła w  $x = 0$

**Zadanie 7.** Zbadać funkcję i naszkicować wykres

$$\begin{aligned} x \mapsto \sqrt[3]{x(x-1)^2}, \quad x \mapsto \frac{\sin^2 x}{2 + \sin x}, \quad x \mapsto \left(x - \frac{3}{x}\right) e^{-\frac{2}{x}}, \\ x \mapsto \arcsin \frac{3x - x^3}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad x \mapsto \frac{x^2 + 3x + 11}{\sqrt{x^2 + 2}}. \end{aligned}$$

**Zadanie 8.** Co jest większe  $e^\pi$ , czy  $\pi^e$ ?

**Zadanie 9.** Zbadaj liczbę rozwiązań równania  $x^x = a^a$ ,  $a > 0$ .

**Zadanie 10.** Obliczyć poniższe granice (dowolnie wybraną metodą). Proponuję część zrobić na ćwiczeniach a resztę w domu.

$$(a) \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x - \frac{1}{2} \operatorname{tg} x}{1 + \cos 4x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(\sin x) - \sin^2(x)}{x^6}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arcsin(2 - x)}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \operatorname{tg} x - \frac{1}{1 - \sin x} \right)$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \operatorname{ctg}^2 x \right)$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\pi x - 1}{2x^2} - \frac{\pi}{x(e^{2\pi x} - 1)} \right)$$

$$(j) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt[n]{x} \log^m x$$

$$(m) \lim_{x \rightarrow a} \arcsin \frac{x - a}{a} \operatorname{ctg}(x - a)$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{\pi} \arcsin \operatorname{tg} x \right)^x$$

$$(p) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x)^{\frac{1}{\log(e^x - 1)}}$$

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{\cos x - 1}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\log(1 + x)}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1 + x)^{\frac{1}{x}}}{x}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1 + x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}$$

$$(i) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2 \log x}{x}$$

$$(k) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{\log x} \right)$$

$$(l) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x(1 + x)} - \frac{\log(1 + x)}{x^2} \right)$$

$$(n) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right)$$

$$(o) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^x}$$

$$(p) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\pi}{2} - \arcsin \operatorname{tg} x \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$(s) \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

$$(t) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg}(2x)}$$

$$(w) \lim_{x \rightarrow 0} \cos(ax)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$(z) \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\log x)^x$$

$$(z) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$$

**Zadanie 11.** Wykaż, że funkcja  $x \mapsto \arctg x + \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  jest stała. Oblicz tę stałą.

**Zadanie 12.** Niech funkcja  $f : ]a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  będzie różniczkowalna dwa razy i ma asymptotę w nieskończoności. Wykazać, że jeśli  $f$  jest wypukła, to wykres leży nad asymptotą, a jeśli wklęsła, to pod.

