Ćwiczenia z Analizy I R (listopad 3)

Rachunek różniczkowy - kontynuacja

Zadanie 1. Niech $f :]-1,0[\cup]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ będzie dana wzorem $f(x) = (x+1)^{\frac{1}{x}}$. Wykazać, że funkcję f można dookreślić w punkcie $x = 0$ w ten sposób, że otrzymana funkcja jest ciagła i rózniczkowalna na $]-1,\infty[$. Wykazać ponadto, że f jest malejąca a $x \mapsto (x+1)f(x)$ jest rosnąca.

Zadanie 2. Niech $f :]0,\infty[\setminus\{1\}$ będzie określona wzorem $f(x) = \frac{x\log x}{x^2-1}$. Pokazać, że funkcję f można dookreślić w punktach $x = 0$ i $x = 1$ tak, żeby otrzymana funkcja była ciągła (w $x = 0$ jednostronnie). Zbadać tę funkcję i naszkicować wykres. Mozna pominąć kwestię wypukłości.

Zadanie 3. Rozwinąć funkcję $x \mapsto \sqrt{x-1}$ wokół $x = 2$ w szereg Taylora. Pokazać że reszta w postaci Lagrange'a znika na pewnym odcinku zawierającym $x = 2$ dla $n \to \infty$.

Zadanie 4. Obliczyć granicę trzema sposobami: używając wzoru Taylora, używając tw. de l'Hospitala i stosując przekształcenia algebraiczne:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}-2\sqrt{x}\right).$$

Zadanie 5. Wykazać, że jeśli funkcja φ ma w otoczeniu x_0 ciągłą drugą pochodną to istnieje granica

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left(\varphi(x_0+h)+\varphi(x_0-h)-2\varphi(x_{})\right).$$

Obliczyć tę granicę.

Zadanie 6. Dowieść, że w podanych obszarach prawdziwe są nierówności

$$\begin{array}{lll}
(a) & \dfrac{x+1}{x-1}\log x > 2 & x>0, x\neq 1 \\[2ex]
(b) & \sin x < \dfrac{x}{1+\frac{1}{3}x^2} & x>0 \\[2ex]
(c) & (1+x)\log^2(1+x) \leqslant x^2 & 1+x>0 \\[2ex]
(d) & \dfrac{1+x}{x}\operatorname{arc\,tg} x > \dfrac{\pi}{2} & x>1
\end{array}$$