II seria zadań z Matematyki III

Zad. 1

Zróżniczkować zewnętrznie formy:
a) $y^2 \sin x dz + e^{y^2+z^2} dx + zx dy$,
b) $(z^2 + z^3 y^2) dx \wedge dy + e^x \cos x dy \wedge dz + \sin y dz \wedge dx$.
Następnie dla obu form dokonać zamiany współrzędnych
$(u, v, w) \to (x, y, z) = (uvw, v^2 + w^2 - u^2, v^2 - w^2 - u^2)$

Zad. 2

Sprawdzić, że forma jest zamknięta i znaleźć formę pierwotną dla:
a) $y^2 e^z \cos x dx + 2ye^z \sin x dy + y^2 e^z \sin x dz$,
b) $(yz - 2y^2) dx \wedge dy - (3z^2 + xy) dy \wedge dz - 2xdz \wedge dx$,
c) $(x^2 + y^2 + z^2)^{-2} z (zdx \wedge dy + xdy \wedge dz + ydz \wedge dx)$ dla $\mathbf{R}^3 \backslash (0, 0, 0)$.
Która forma jest zupełna?

Zad. 3

Sprawdzić twierdzenie Stokesa

$$\int_{D,\imath} d\omega = \int_{\partial D, \partial \imath} \omega$$

dla:
a) $\omega = x^3 (z + 1)^2 y^2$,
$D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y = 0, z \geq 0\}$, $\imath$ zgodna z $dx - dy$ w punkcie $(0, 0, 1)$,
b) $\omega = y^2 x dx + 3x^3 dy$,
$D = \{(x, y) : (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 4$, $\imath$ zgodna z $dx \wedge dy$,
c) $\omega = z^2 y dx \wedge dy + x^3 z dy \wedge dz + zyx dz \wedge dx$,
$D = \{(x, y, z) : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 1\}$, $\imath$ zgodna z $dx \wedge dy \wedge dz$,
d) $\omega = (x^2 + xyz) dx + (yz - xz) dy + (z^2 y^2 - x^2) dz$,
$D = \{(x, y, z) : 2x^2 + y^2 + 4z^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, $\imath$ zgodna z $dx \wedge dy$ w $(0, 0, 1/2)$.
Wskazówka: Można użyć (przesuniętego) układu biegunowego/eliptycznego.

Zad. 4

Obliczyć całkę z formy

$$\omega = e^{-x^2-y^2-z^3} [2(1 - x^2 - y^2) dx \wedge dy + 3z^2 y dz \wedge dx + 3z^2 x dy \wedge dz]$$

po powierzchni tworzącej stożka $\{(x, y, z) : z = 1 - x^2 - y^2 \geq 0\}$ zorientowanej na zewnątrz stożka ograniczonego od dołu płaszczyzną xy. Skorzystać z tw. Stokesa, policzyć $d\omega$.

Zad. 5

Wyrazić gradient, rotację i dywergencję we współrzednych bisferycznych:

$$x = \frac{\sin v \cos \phi}{\cosh u - \cos v},\ y = \frac{\sin v \sin \phi}{\cosh u - \cos v},$$

$$z = \frac{\sinh u}{\cosh u - \cos v}.$$