Zadania domowe, seria 1.

Matematyka 3, semestr zimowy 2011/2012

Zadanie 1. W przestrzeni afinicznej $\mathbb{R}^2$ dane są dwa układy współrzędnych $\Phi = (a, (e_1, e_2))$ i $\Psi = (b, (F(e_1), F(e_2)))$, gdzie $a = (3, 4)$, $b = (1, 1)$, (e_1, e_2) jest bazą kanoniczną w przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$ zaś F macierzą obrotu o kąt φ. Znaleźć zależność między współrzędnymi (x^1, x^2) w układzie Φ a współrzędnymi (y^1, y^2) w układzie Ψ.

Zadanie 2. Dana jest postać parametryczna równania płaszczyzny duwymiarowej w $\mathbb{R}^3$.

$$x = 2t - s, \qquad y = 1 + 3t, \qquad -3 + s.$$

Znaleźć równanie tej płaszczyzny.

Zadanie 3. Znaleźć punkt przebicia płaszczyzny π prostą ℓ:

$$\pi : \quad 3x - 3y + 2z - 5 = 0 \qquad \ell : \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 + 4t \\ z = 3t \end{cases}$$

Zadanie 4. W $\mathbb{R}^3$ z kanonicznym iloczynem skalarnym znaleźć odległość punktu $a = (7, 9, 7)$ od prostej

$$\ell : \begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

Zadanie 5. Niech V oznacza przestrzeń wektorową wielomianów stopnia nie większego niż 3. Formy liniowe ϕ, ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 określone są wzorami

$$\phi(v) = v(7), \quad \phi_k(v) = v^{(k)}(-4),$$

gdzie $v^{(k)}$ oznacza k-tą pochodną wielomianu v. Operator $D : V \to V$ dany jest wzorem $D(v) = v^{(1)}$. Wyrazić $D^*(\phi)$ jako kombinację liniową form ϕ_k. Wskazówka: posłużyć się bazą dualną do bazy $(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$.

Zadanie 6. Znaleźć przekrój torusa $S = \{(x, y, z) : (\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = b^2\}$ płaszczyzną (afiniczną) styczną w punkcie $(a - b, 0, 0)$. Zapisać równanie krzywej będącej przecięciem we współrzędnych (z, y). Jak nazywa się krzywa otrzymana w przypadku $a = 2b$?

Zadanie 7. *Helikoida.* Znaleźć równanie powierzchni jaką zakreśla prosta pozioma obracająca się wzdłuż osi $0z$ i jednocześnie przesuwająca się w kierunku osi z. Opis parametryczny tej powierzchni to:

$$\kappa(t, \varphi) = (t \cos \varphi, t \sin \varphi, a\varphi)$$

dla $a \neq 0$. Sprawdzić regularność parametryzacji κ.

Zadanie 8. *Przypomnienie z zeszłego semestru, ale na temat.* Znaleźć punkty krytyczne funkcji $f(x,y,z) = (x-3y)z$ na powierzchni $S = \{(x,y,z) : 3x^2 + 5y^2 + 30z^2 = 32\}$. Zbadać charakter dwóch z nich dla dwóch różnych wartości mnożnika Lagrange'a.

Zadanie 9. Wyrazić we współrzędnych sferycznych i cylindrycznych następujące formy różniczkowe na $\mathbb{R}^3$:

$$\sigma_1 = x\mathsf{d}y - y\mathsf{d}x,$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{\rho}\left(xz\mathsf{d}x + yz\mathsf{d}y - \rho^2\mathsf{d}z\right),$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{r^3}\left(x\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + y\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + z\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y\right),$$

$$\sigma_4 = \frac{1}{z}\left(x\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + y\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x - z\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y\right),$$

gdzie $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Zadanie 10. Niech H oznacza górną powłokę hiperboloidy jednopowłokowej w $\mathbb{R}^3$, tzn.

$$H = \{(x,y,z) : \ \ x^2 + y^2 - z^2 = 1, z > 0\}.$$

W $\mathbb{R}^3$ rozważamy formę dwuliniową symetryczną

$$\left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \right\rangle = xx' + yy' - zz'$$

Sprawdzić, że forma indukowana z $\langle\cdot|\cdot\rangle$ na przestrzeni stycznej do H w każdym punkcie jest dodatnio określona.