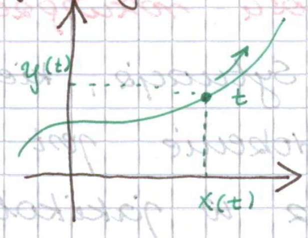
Stawiamy przed sobą następujący problem:

Jak znaleźć rozwiązanie układu równań różniczkowych liniowych pierwszego rzędu z danymi warunkami początkowymi

$$\begin{cases} \dot{x} = \cancel{3x}\ 2x + 3y & x(0) = 1 \\ \dot{y} = -x - 2y & y(0) = 1 \end{cases}$$

Po pierwsze zapiszmy ten układ równań nieco inaczej. Zamiast myśleć o dwóch funkcjach x i y zależnych od czasu myślmy o pewnej krzywej w $\mathbb{R}^2$

$$t \longmapsto \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \text{np}$$

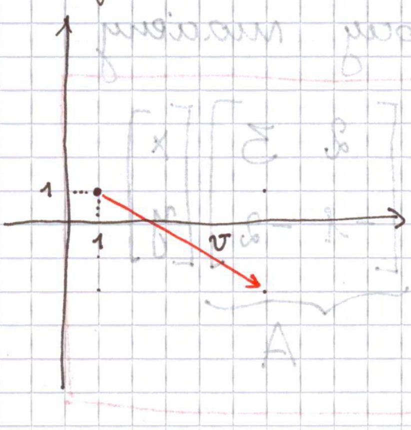


Nasz układ równań opisuje więc krzywą w $\mathbb{R}^2$, która dla $t=0$ powinna przechodzić przez punkt $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (warunki początkowe). O tej krzywej nie wiadomo jaki ma kształt ale wiadomo jak wygląda wektor prędkości tej krzywej w każdym punkcie $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ przez który mogłaby ona przechodzić.

Na przykład w $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ wektor prędkości to

$$\dot{x} = 2\cdot 1 + 3 \cdot 1 = 2 + 3 = 5$$
$$\dot{y} = -1 - 2\cdot 1 = -1 - 2 = -3$$

$$v = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$



układ równań zadaje pole wektorowe (wektor w każdym punkcie). Rozwiązanie jest krzywą, która ma tę własność, że wektory tego pola są w każdym punkcie styczne do tej krzywej.
W przypadku równań różniczkowych zwyczajnych mamy twierdzenie, które mówi, że przy odpowiednich założeniach dotyczących regularności funkcji po prawej stronie rozwiązanie z danymi warunkami początkowymi zawsze istnieje i jest wyznaczone jednoznacznie. Jest to Twierdzenie Cauchy'ego o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego. Sytuacja, kiedy mamy udowodnione takie twierdzenie jest bardzo wygodna, ponieważ teraz w jakikolwiek sposób będziemy odgadli to rozwiązanie - będzie ono z całą pewnością dobre i ogólne jeśli tylko będzie spełniało równanie. Możemy wybrać metodę rozwiązywania jaką chcemy.
Ja posłużę się metodą kolejnych przybliżeń pochodzącą od Picarda. Najpierw jednak zapiszę układ równań w elegancki sposób przy pomocy macierzy

$$\boxed{\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix}2 & 3\\ -1 & -2\end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}}$$

Zastosujmy teraz metodę kolejnych przybliżeń używając następujących oznaczeń

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \dot{v} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} \qquad \dot{v} = A v \qquad v_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

(1) $$v_1(t) = v_0(t) + \int_0^t A v_0(s)\, ds$$

Dlaczego tak? Ponieważ nasze równanie różniczkowe zastąpić można równaniem całkowym

$$v(t) = \overset{v_0}{v(0)} + \int_0^t A v(s)\, ds$$

istotnie, po zróżniczkowaniu mamy

$$\dot{v} = 0 + A v(t) = A v(t)$$ ponadto $v(0) = v_0$

bo $\int_0^0 \ldots = 0$

(2) $$v_2(t) = v_1(0) + \int_0^t A v_1(s)\, ds$$

⋮ i tak dalej

(n+1) $$v_{n+1}(t) = v_n(0) + \int_0^t A v_n(s)\, ds$$

⋮

$$\downarrow_{n \to \infty} \qquad\qquad \downarrow_{n \to \infty}$$

jeśli istnieje granica odpowiednio regularna (jednostajna) tak żeby można było przechodzić do granicy pod znakiem całki otrzymujemy

$$v(t) = \cancel{v_0}\; v(0) + \int_0^t A v(s)\, ds$$

Procedura ta ma jakiś sens...

4

Wykonajmy tę procedurę

$$\vartheta_1 = \vartheta_0 + \int_0^t A\vartheta_0\, ds = \vartheta_0 + A\vartheta_0 \cdot s\Big|_0^t = \underbrace{\vartheta_0 + A\vartheta_0 t}_{\vartheta_1(t)}$$

$$\vartheta_2 = \vartheta_1(0) + \int_0^t A(\vartheta_0 + A\vartheta_0 s)\, ds =$$

$$= \vartheta_0 + \int_0^t (A\vartheta_0 + A^2\vartheta_0 s)\, ds = \vartheta_0 + \left(A\vartheta_0 s + \frac{1}{2}A^2\vartheta_0 s^2\right)\Big|_0^t =$$

$$= \vartheta_0 + A\vartheta_0 t + \frac{1}{2}A^2\vartheta_0 t^2$$

$$\vartheta_3(t) = \vartheta_3(0) + \int_0^t A\left(\vartheta_0 + A\vartheta_0 s + \frac{1}{2}A^2\vartheta_0 s^2\right) ds =$$

$$= \vartheta_0 + \int_0^t A\vartheta_0 + A^2\vartheta_0 s + \frac{1}{2}A^3\vartheta_0 s^2 =$$

$$= \vartheta_0 + A\vartheta_0 t + \frac{1}{2}A^2\vartheta_0 t^2 + \frac{1}{6}A^3\vartheta_0 t^3$$

i td

$$\vartheta_n(t) = \vartheta_0 + At\vartheta_0 + \frac{1}{2}A^2\vartheta_0 t^2 + \frac{1}{6}A^3\vartheta_0 t^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^n\vartheta_0 t^n =$$

$$= \left(\mathbb{1} + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \frac{1}{6}A^3t^3 + \dots + \frac{1}{n!}A^nt^n\right)\vartheta_0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\mathbb{1} + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{n!}A^nt^n\right) = e^{At}$$

przez analogię do $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^n + \dots$

Ale uwaga!

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{zazwyczaj } e^{A+B} \neq e^A e^B \\ \text{jeśli } AB - BA \neq 0\end{array}}$$

⑤

Ogólnie rzecz biorąc znaleźliśmy rozwiązanie każdego układu równań różniczkowych liniowych z macierzą A niezależną od czasu!

$$\dot{v} = Av \implies v(t) = e^{At} v_0$$

Powstaje oczywiście problem jak znaleźć e^{At}? Jest to nieskończony szereg potęgowy. Nie bardzo wiadomo jak sobie z nim dać radę. Pomogą nam następujące obserwacje:

1. Gdy macierz A jest diagonalna rachunki są bardzo proste (układ równań to wtedy dwa oddzielne nie związane ze sobą równania)

Skoro $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{bmatrix}$ to

$$\mathbb{1} + \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{bmatrix} t^2 + \dots + \frac{1}{n!}\begin{bmatrix} \lambda^n & 0 \\ 0 & \mu^n \end{bmatrix} t^n + \dots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + \lambda t + \frac{1}{2}\lambda^2 t^2 + \dots & 0 \\ 0 & 1 + \mu t + \frac{1}{2}\mu t^2 + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix}$$

2. Odwzorowanie liniowe może być reprezentowane różnymi macierzami w zależności od tego jakiej bazy używamy.

Teraz musimy wrócić do podstaw algebry liniowej.

Macierz, taka jak A reprezentuje odwzorowanie liniowe z przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$ do przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^2$

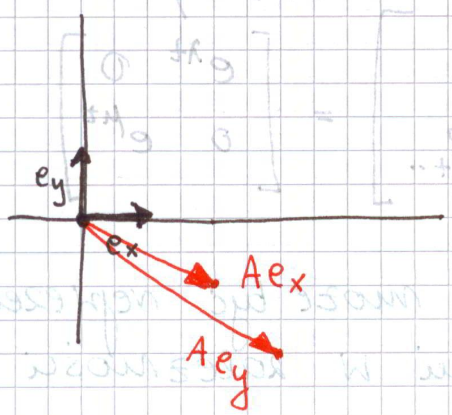
$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \longmapsto A\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2x+3y\\-x-2y\end{bmatrix}$$

Bezpośrednio z postaci macierzy A łatwo jest odczytać jak ta macierz działa na wektory bazy $e_x = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ i $e_y = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. Istotnie

$$Ae_x = \begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\cdot 1+3\cdot 0\\-1\cdot 1-2\cdot 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix} = 2e_x - e_y$$

$$Ae_y = \begin{bmatrix}2&3\\-1&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\cdot 0+3\cdot 1\\-1\cdot 0+(-2)\cdot 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\-2\end{bmatrix} = 3e_y - 2e_y$$

Kolumny macierzy A to wartości odwzorowania na wektorach bazowych



Możemy się umówić, że zamiast używać bazy standardowej e_x i e_y użyjemy innej bazy.

7 Możemy to zrobić dzięki temu, że odwzorowanie ~~...~~ A jest liniowe. Zobaczmy co będzie jeśli zamiast wektorów $e_{x,y}$ użyjemy wektorów

$$f_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \quad f_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

są to wektory liniowo niezależne, które także tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Każdy wektor $v = \begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ można zapisać w bazie $e = (e_x \; e_y)$

$$(*) \quad v = x \cdot e_x + y \cdot e_y = x \cdot \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

a można też w bazie $f = (f_1, f_2)$.

Jak to zrobić? Zauważmy, że

$$f_1 = e_x + e_y \qquad f_2 = e_x - e_y$$

Możemy rozwiązać powyższy układ równań otrzymując:

$$\begin{cases} f_1 = e_x + e_y \\ f_2 = e_x - e_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_1 + f_2 = 2e_x \\ f_1 - f_2 = 2e_y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e_x = \frac{1}{2} f_1 + \frac{1}{2} f_2 \\ e_y = \frac{1}{2} f_1 - \frac{1}{2} f_2 \end{cases}$$

Teraz wstawiamy do (*)

$$v = xe_x + ye_y = x\left(\frac{1}{2}f_1 + \frac{1}{2}f_2\right) + y\left(\frac{1}{2}f_1 - \frac{1}{2}f_2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}x f_1 + \frac{1}{2}x f_2 + \frac{1}{2}y f_1 - \frac{1}{2}y f_2 =$$

$$= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right) f_1 + \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\right) f_2$$

Wektor v, który ma współrzędne $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ w bazie e, ma współrzędne $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y\end{bmatrix}$ w bazie f

8

Jak odróżnić w jakiej bazie pracujemy?

Zazwyczaj oznaczamy

$[v]^f$ ← kolumna liczb oznaczająca wektor zapisany w bazie f.

jeśli $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = e_x + 3e_y$

$$[v]^f = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot 3 \\ \frac{1}{2}\cdot 1 - \frac{1}{2}\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[v]^f = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 2\cdot f_1 - f_2$$

Z dotychczasowych ~~informacji~~ rachunków uzyskaliśmy informację jak obliczyć współrzędne w bazie f jeśli znamy współrzędne w bazie f:

$$[v]^f = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{[v]^e}$$

Operację zmiany bazy też można zapisać za pomocą macierzy. To jest trochę inna macierz niż A. To jest macierz, która nie przestrzeni $\mathbb{R}^2$ „nie robi niczego" (odwzorowanie identycznościowe) a tylko tłumaczy współrzędne z jednej bazy do drugiej taką macierz oznaczamy

$$[\mathrm{id}]^{f}_{e}$$

f – do bazy f

id – odwzorowanie identycznościowe

e – tłumaczy współrzędne z bazy e

$$[v]^f = [\mathrm{id}]^f_e \, [v]^e$$

Bardzo prosto jest także znaleźć ~~macierz~~ ~~odw~~ macierz, która tłumaczy współrzędne w drugą stronę, to znaczy z bazy f do bazy e. Macierz tę, zgodnie z zasadami oznaczeń byśmy $[\mathrm{id}]^e_f$. Załóżmy, że zrobimy przejście „z bazy e do bazy f" i potem „z bazy f do bazy e" – ostatecznie powrócilibyśmy do wyjściowej postaci wektora

$$[v]^e \longrightarrow [v]^f = [\mathrm{id}]^f_e [v]^e \longrightarrow [v]^e = \underbrace{[\mathrm{id}]^e_f \, [\mathrm{id}]^f_e}_{\text{czyli to musi być } \mathbb{1}} [v]^e$$

$$\mathbb{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Otrzymujemy

$$[\mathrm{id}]^e_f \, [\mathrm{id}]^f_e = \mathbb{1}$$

czyli te macierze są wzajemnie odwrotne – mamy jedną możemy znaleźć drugą

(10) W szczególności, jeśli $[id]_e^f = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ +1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$

to $[id]_f^e = \left([id]_e^f\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}^{-1} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Więcej na temat zapisywania wektorów w bazie, macierzy odwrotnych i innych zagadnień liniowych będzie na ćwiczeniach.

Teraz pomyślmy przez chwilę jak zmieni się macierz reprezentująca odwzorowanie A jeśli wektory na które działa oraz jeśli wyniki tego działania zapiszemy raczej w bazie f niż e

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{v}$$

$v = [v]^e$

$$[v]^f \longmapsto ? \quad [v]^f$$

zamieniam współrzędne z f do e

Działam odwzorowaniem A

$$[v^f] \rightsquigarrow [v^e]^e = [id]_f^e [v]^f \rightsquigarrow A [id]_f^e [v]^f$$

$$\rightsquigarrow [id]_e^f A [id]_f^e [v]^f$$

Tłumaczę współrzędne do bazy f

to jest odwzorowanie A w bazie f

11

$$[A]_f^f = [id]_e^f \, A \, [id]_f^e$$

ile to u nas wyjdzie?

$$\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}}$$

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 8 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = [A]_f^f$$

Widać więc, że ta macierz wygląda zupełnie inaczej niż wyjściowa

$$A = [A]_e^e = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad [A]_f^f = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Możemy także łatwo przeliczać z bazy do bazy posługując się macierzami przejścia.

Może więc znajdzie się taka baza w której macierz A będzie diagonalna? Wtedy łatwo obliczymy e^{At} i wrócimy do wyjściowej bazy kanonicznej.

Sprawdźmy najpierw czy taka działalność będzie legalna:

12

Szukam e^{At} w bazie (e_x, e_y)

$$e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n$$

$$[e^{At}]_e^e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left([A]_e^e\right)^n t^n = (*)$$

załóżmy, że mamy bazę $g = (g_1, g_2)$ taką, że $[A]_g^g$ diagonalna

$$[id]_g^e \, [A]_g^g \, [id]_e^g = [A]_e^e = A$$

$$A^n = \left([A]_e^e\right)^n = \left([id]_g^e [A]_g^g [id]_e^g\right)^n =$$

$$= \underbrace{[id]_g^e [A]_g^g [id]_e^g \cdot [id]_g^e [A]_g^g [id]_e^g \cdot \ldots}_{\times n}$$

macierz jednostkowa $\mathbb{1}$, bo macierze przejścia są wzajemnie odwrotne

$$= [id]_g^e \underbrace{[A]_g^g \, \mathbb{1} \, [A]_g^g \, \mathbb{1} \, \ldots \, \mathbb{1} [A]_g^g}_{\left([A]_g^g\right)^n} [id]_e^g$$

$$(*) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} [id]_g^e \left([A]_g^g\right)^n [id]_e^g \, t^n =$$

$$= [id]_g^e \underbrace{\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left([A]_g^g\right)^n t^n \right)}_{\text{umiemy policzyć}} [id]_e^g$$

Procedura: Startuję z A ⟶ szukam bazy diagonalizującej ⟶ zapisuję A w bazie diagonalizującej ⟶ wyznaczam e^{At} ⟶ wracam do bazy kanonicznej.

Powstaje teraz problem: jak znaleźć bazę diagonalizującą? Załóżmy, że $g=(g_1, g_2)$ jest taką bazą. Macierz $[A]^g_g$ jest postaci

$$[A]^g_g = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$$ a wektory g_1 i g_2 to

w bazie g: $[g_1]^g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $[g_2]^g = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Działamy teraz odwzorowaniem A na wektor g_1, rachując w bazie g:

$$[Ag_1]^g = [A]^g_g [g_1]^g = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda [g_1]^g$$

Ogólnie $\boxed{Ag_1 = \lambda g_1}$

Ważna własność wektora należącego do bazy diagonalizującej. Działanie operatora na ten wektor polega na mnożeniu przez liczbę!

Podobnie rzecz by się miała z g_2:

$$[Ag_2]^g_g = [A]^g_g [g_2]^g = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mu \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \mu [g_2]^g$$

$$Ag_2 = \mu g_2$$

Poszukiwanie bazy diagonalizującej polega na poszukiwaniu liczb λ i wektorów g takich, że

$$Ag = \lambda g \quad (*)$$

Równanie $Ag = \lambda g$ zapisujemy jako

$$Ag - \lambda g = 0 \quad \text{czyli} \quad (A - \lambda \mathbb{1})g = 0$$

Ostatnia postać oznacza, że niezerowy wektor g jest w jądrze odwzorowania $(A - \lambda \mathbb{1})$. Oznacza to, że odwzorowanie to nie jest odwracalne a więc ma wyznacznik równy 0

$$0 = \det(A - \lambda \mathbb{1}) = \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 3 \\ -1 & -2-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(-2-\lambda) + 3 = (-4 + 2\lambda - 2\lambda + \lambda^2) + 3 =$$

$$= \lambda^2 - 4 + 3 = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$$

Istnieją dwie liczby takie, że równanie $(*)$ może być spełnione. Są to $+1$ i -1. Jakie wektory tym liczbom odpowiadają?

$\lambda = +1$

$$Ag = g \quad \underbrace{(A - \mathbb{1})}_{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}} g = 0 \qquad g = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

proporcjonalne równania

$a + 3b = 0$ można wziąć $b = 1$, $a = -3$

tzn. $g_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ bądź dowolny wektor propor-
cjonalny do niego (15)

$\lambda = -1$ $\quad Ag = -g \quad Ag + g = 0 \quad (A + 1\!\!1)g = 0$

$$g = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad A + 1\!\!1 = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

proporcjonalne równania

$a + b = 0$

$a = -b$ $\quad$ np $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = g_2$ (lub dowolny proporcjonalny)

Mamy więc propozycję: baza diagonalizująca jest postaci

$$g = (g_1, g_2) = \left(\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

Sprawdźmy:

$$Ag_1 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 1 \\ (-1) \cdot (-3) + (-2) \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 + 3 \\ 3 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = g_1$$ O.K

$$Ag_2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 + 3 \\ 1 - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = -g_2.$$ O.K.

$$[A]^g_g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[e^{At}]^g_g = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}$$ Trzeba teraz wrócić do bazy kanonicznej

Potrzebujemy $[id]_e^g$, $[id]_g^e$. Wiadomo, że wystarczy znaleźć jedną z nich – drugą jest macierzą odwrotną

$$e=(e_x, e_y)=\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$g=(g_1, g_2)=\left(\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right)$$

$$\boxed{g_1=-3e_x+1e_y \qquad g_2=-e_x+e_y}$$

$$\begin{aligned} g_1&=-3e_x+e_y\\ -\quad g_2&=-e_x+e_y\\ \hline g_1-g_2&=-2e_x \end{aligned}$$

$$e_x=-\frac{1}{2}(g_1-g_2)=-\frac{1}{2}g_1+\frac{1}{2}g_2$$

$$e_y=g_1+3e_x=g_1-\frac{3}{2}g_1+\frac{3}{2}g_2=$$

$$=\cancel{\frac{1}{2}g_1}-\frac{1}{2}g_1+\frac{3}{2}g_2$$

ogólny wektor

$$v=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=xe_x+ye_y$$

$$\begin{cases} e_x=-\frac{1}{2}g_1+\frac{1}{2}g_2\\ e_y=-\frac{1}{2}g_1+\frac{3}{2}g_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=xe_x+ye_y=x\left(-\frac{1}{2}g_1+\frac{1}{2}g_2\right)+y\left(-\frac{1}{2}g_1+\frac{3}{2}g_2\right)=$$

$$=\underbrace{\left(-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y\right)g_1+\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}y\right)g_2}$$

współrzędne wektora v
w bazie g

$$[v]^g = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y \\ +\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}}_{[id]^g_e} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{[v]^e}$$

$$[id]^g_e \qquad [id]^e_g = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ \quad g_1 \qquad g_2 \end{array}$$

w bazie kanonicznej to nie przypadek !!!

Przeliczamy teraz e^{At} do bazy kanonicznej

$$e^{At} = [e^{At}]^e_e = [id]^e_g \, [e^{At}]^g_g \, [id]^g_e =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -3e^t & -e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ +1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^t - e^{-t} & 3e^t - 3e^{-t} \\ -e^t + e^{-t} & -e^t + 3e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3e^t - e^{-t} & 3e^t - 3e^{-t} \\ -e^t + e^{-t} & -e^t + 3e^{-t} \end{bmatrix}$$

Szukamy teraz rozwiązanie z danymi początkowymi $\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}$

$$v(t)=e^{At}v_0$$

$$v(t)=\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3e^{t}-e^{-t} & 3e^{t}-3e^{-t}\\ -e^{t}+e^{-t} & -e^{t}+3e^{-t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3e^{t}-e^{-t}+3e^{t}-3e^{-t}\\ -e^{t}+e^{-t}-e^{t}+3e^{-t}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6e^{t}-4e^{-t}\\ -2e^{t}+4e^{-t}\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3e^{t}-2e^{-t}\\ -e^{t}+2e^{-t}\end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}x(t)&=3e^{t}-2e^{-t}\\ y(t)&=-e^{t}+2e^{-t}\end{aligned}}$$

Sprawdzamy?

$\cancel{\dot{x}=3e^{t}+2e^{-t}}$ $\quad \cancel{2x+3y=6e^{t}-2e^{-t}-3e^{t}+3e^{-t}=3e^{t}+2e^{t}}$

$\cancel{\dot{y}=-e^{t}+2e^{-t}}$ $\quad \cancel{-x-2y=-3e^{t}+2e^{-t}+2e^{t}-2e^{-t}=-e^{t}+e^{-t}}$

~~równanie różniczkowe spełnione~~

$\cancel{-x-2y=-3e^{t}-2e^{-t}+2e^{t}+4e^{-t}=}$

$\cancel{=-e^{t}+2e^{-t}}$

$\dot{x}=3e^{t}+2e^{-t}$ $\quad 2x+3y=6e^{t}-4e^{-t}-3e^{t}+6e^{-t}=3e^{t}+2e^{-t}$

$\dot{y}=-e^{t}-2e^{-t}$ $\quad -x-2y=-3e^{t}+2e^{-t}+2e^{t}-4e^{-t}=-e^{t}-2e^{-t}$

$x(0)=1 \quad y(0)=1$ o.k.

Co dalej?

- Rozwiążujemy jeszcze jeden przykład
- Zastanawiamy się co może pójść źle
- Rozwiążujemy problemy, które pojawiły się powyżej.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad t \geq 0 \qquad \begin{aligned} \dot{x}(t) &= x(t) - 2y(t) \\ \dot{y}(t) &= x(t) + 4y(t) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x(0) &= 3 \\ y(0) &= 4 \end{aligned}$$

$$\det(B - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = 4 - 4\lambda - \lambda + \lambda^2 + 2$$

$$= \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3) \qquad [B]_g^g = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad [e^{Bt}]_g^g = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

tu może pójść źle

baza diagonalizująca:

$\lambda = 2$

$$(B - 2\cdot 1\!\!1)g = 0 \qquad \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} a + 2b &= 0 \\ a &= -2b \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = g_1$$

$\lambda = 3$

$$(B - 3 1\!\!1)g = 0 \qquad \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} a + b &= 0 \\ a &= -b \end{aligned} \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = g_2$$

$$[id]_g^e = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad [id]_e^g = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$e^{Bt} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{2t} & e^{3t} \\ e^{2t} & -e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & 2e^{2t} - 2e^{3t} \\ -e^{2t} + e^{3t} & -e^{2t} + 2e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{Bt} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6e^{2t} - 3e^{3t} + 8e^{2t} - 8e^{3t} \\ -3e^{2t} + 3e^{3t} - 4e^{2t} + 8e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14e^{2t} - 11e^{3t} \\ -7e^{2t} + 11e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$x(t) = 14e^{2t} - 11e^{3t}$$
$$y(t) = -7e^{2t} + 11e^{3t}$$