17.10.2012 ①

W czasie poprzedniego wykładu nauczyliśmy się rozwiązywać układy równań różniczkowych liniowych pierwszego rzędu w sytuacji, kiedy macierz definiująca ten układ równań była diagonalizowalna. Rozwiązaliśmy także dwa konkretne przykłady. Naszym zadaniem teraz będzie zastanowienie się co może pójść źle w naszej procedurze rozwiązywania. Przypomnijmy zatem najważniejsze punkty

1. Układ równań miał postać

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = A\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix} \qquad \begin{aligned}x(0)&=x_0\\ y(0)&=y_0\end{aligned}$$

A jest tu macierzą liczbową (niezależną od czasu) zaś (x_0, y_0) to współrzędne punktu przez który krzywa stanowiąca rozwiązanie ma przejść dla czasu $t=0$.

2. Rozwiązaniem postawionego w punkcie 1. zagadnienia jest krzywa $t \longmapsto \begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix}x(t)\\ y(t)\end{bmatrix} = e^{At}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix}$$

cała trudność polega więc na obliczeniu e^{At}. Macierzy e^{At} szukaliśmy w bazie diagonalizującej macierz A - wtedy rachunki są względnie proste a przede wszystkim wykonalne

3. Poszukiwanie bazy diagonalizującej polega na znalezieniu wektorów własnych macierzy A. Najpierw wyznaczamy wartości własne będące rozwiązaniem równania

$$0 = w_A(\lambda) = \det(A - \lambda \underline{I})$$

2

Dla macierzy 2×2 równanie to jest wielomianowym równaniem kwadratowym. W dotychczasowych przykładach równanie to miało dwa różne pierwiastki rzeczywiste. W takim przypadku mamy gwarancję, że istnieje baza diagonalizująca.
Co może pójść źle? Może się okazać, że równanie kwadratowe o którym mowa ma dwa różne pierwiastki zespolone. Może się też okazać, że ma ono jeden podwójny pierwiastek rzeczywisty. Zajmiemy się teraz tymi dwoma sytuacjami. Potrzebujemy konkretnego przykładu: Jak zaprojektować sobie macierz mającą żądane własności? Zauważmy, że wielomian charakterystyczny zadany jest przez ślad i wyznacznik macierzy

$$w_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - cb =$$

$$= ad - \lambda d - \lambda a + \lambda^2 - cb = \lambda^2 - \lambda\underbrace{(a+d)}_{\text{ślad}} + \underbrace{(ad-cb)}_{\text{wyznacznik}}$$

Załóżmy teraz, że potrzebujemy macierzy o wyrazach rzeczywistych mającą zespolone wartości własne. Oznacza to w szczególności, że wartości te muszą być wzajemnie sprzężone np

$$w(\lambda) = (\lambda - 1 - i)(\lambda - 1 + i) = \lambda^2 - (1+i)\lambda - (1-i)\lambda +$$

$$+ (1+i)(1-i) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

wielomian ten ma oczywiście ujemną „deltę"
Ślad szukanej przez nas macierzy jest 2 i wyznacznik też 2.

takie macierze to np

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \ldots$$

Ta druga ma mniejsze co do wartości bezwzględnej wyrazy macierzowe, dlatego to właśnie ona będzie „bohaterką" następnego przykładu rachunkowego

ZADANIE Rozwiązać układ równań różniczkowych

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{matrix} 3x - 5y \\ x - y \end{matrix}$$

z wartościami początkowymi $x(0) = 1 \quad y(0) = 2$.

Postępujemy jak zwykle

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \omega_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(-1-\lambda) + 5 = -3 + \lambda - 3\lambda + 5 + \lambda^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$$

i już wiemy że taki wielomian ma dwa rozwiązania zespolone $\lambda = 1 + i \quad \mu = 1 - i$ (oraz $\overline{\lambda} = \mu$.)

Jak sobie z tym poradzić? Zacisnąć zęby i liczyć dalej jak zwykle bardzo starając się nie popełnić błędu rachunkowego. Wynik na końcu musi znowu być rzeczywisty!

$\lambda = 1 + i$ szukamy zespolonego wektora własnego:

$$(A - \lambda \mathbb{1})v = 0 \qquad \begin{bmatrix} 3-1-i & -5 \\ 1 & -1-1-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} 2-i & -5 \\ 1 & -2-i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$$

Wbrew pozorom te dwa równania też są zależne! Jeśli drugie równanie pomnożymy przez 2-i otrzymamy pierwsze

$$(2-i)/\quad a-(2+i)b=0$$

$$(2-i)a-(2-i)(2+i)b=0$$
$$(2-i)a-(4-2i+2i-(i)^2)b=0$$
$$(2-i)a-(4+1)b=0$$
$$(2-i)a-5b=0$$

Wystarczy zatem rozważyć jedno z równań, na przykład drugie:

$$a-(2+i)b=0 \Rightarrow a=(2+i)b$$

Rozwiązaniem są więc wektory postaci

$$\begin{bmatrix}(2+i)b\\ b\end{bmatrix}=b\begin{bmatrix}2+i\\ 1\end{bmatrix}$$

Jako wektor bazowy wybieram $g_1=\begin{bmatrix}2+i\\ 1\end{bmatrix}$

Teraz bierzemy

$$\mu=1-i$$

$$\begin{bmatrix}3-1+i & -5\\ 1 & -1-1+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=0 \qquad \begin{bmatrix}\cancel{4}\ 2+i & -5\\ 1 & -2+i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=0$$

$$a+(-2+i)b=0 \Rightarrow a=(2-i)b$$

$$\begin{bmatrix}(2-i)b\\ b\end{bmatrix}=b\begin{bmatrix}2-i\\ 1\end{bmatrix} \qquad \text{wybieram } g_2=\begin{bmatrix}2-i\\ 1\end{bmatrix}$$

Zauważmy, (i jest to Bardzo Ważna Obserwacja!!!) że $\overline{g_1}=g_2$. W takim przypadku zawsze można wybrać wektory bazowe jako wzajemnie sprzężone. Jest to opłacalne rachunkowo, a wynika z faktu że wyjściowa macierz jest rzeczywista

Mamy więc bazę $g_1 = \begin{bmatrix} 2+i \\ 1 \end{bmatrix}$ $g_2 = \begin{bmatrix} 2-i \\ 1 \end{bmatrix}$ ⑤

i jedną z macierzy przejścia

$$[id]^e_g = \begin{bmatrix} 2+i & 2-i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Drugą macierz przejścia znajdujemy jako macierz odwrotną

$$[id]^g_e = \left([id]^e_g\right)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} 2+i & 2-i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2+i-(2-i)} \begin{bmatrix} 1 & -2+i \\ -1 & 2+i \end{bmatrix} = \frac{1}{2i} \begin{bmatrix} 1 & -2+i \\ -1 & 2+i \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i & 2i+1 \\ i & -2i+1 \end{bmatrix}$$

w bazie diagonalizującej mamy $\left[e^{At}\right]^g_g =$

$$= \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(1+i)t} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t e^{it} & 0 \\ 0 & e^t e^{-it} \end{bmatrix} =$$

$$= e^t \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix}$$

Teraz czeka nas najbardziej pracochłonny fragment obliczeń - trzeba pomnożyć przez siebie trzy macierze, żeby przeliczyć e^{At} z bazy g do bazy e:

$$[e^{At}]^e_e = [id]^e_g \, [e^{At}]^g_g \, [id]^e_g =$$

$$= \begin{bmatrix} 2+i & 2-i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} e^t \begin{bmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{-it} \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -i & 2i+1 \\ i & -2i+1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{e^t}{2}\begin{bmatrix}2+i & 2-i\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-ie^{it} & (2i+1)e^{it}\\ ie^{-it} & (-2i+1)e^{-it}\end{bmatrix} =$$

sprzężone kolumny sprzężone wiersze

$$= \frac{e^t}{2}\begin{bmatrix}(2+i)(-ie^{it}) + (2-i)ie^{-it} & (2+i)(2i+1)e^{it} + (2-i)(-2i+1)e^{-it}\\ -ie^{it} + ie^{-it} & (2i+1)e^{it} + (-2i+1)e^{-it}\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{e^t}{2}\begin{bmatrix}-2ie^{it} + \boxed{e^{it}} + 2ie^{-it} + \boxed{e^{-it}} & (4i-2+2+i)e^{it} + (-4i-2+2-i)e^{-it}\\ \frac{e^{it} \cancel{+} - e^{-it}}{i} & 2i(e^{it}-e^{-it}) + (e^{it}+e^{-it})\end{bmatrix}$$

$$= \frac{e^t}{2}\begin{bmatrix}-2i(e^{it}-e^{-it}) + (e^{it}+e^{-it}) & 5i(e^{it}-e^{-it})\\ 2\sin t & -2\,\frac{e^{it}-e^{-it}}{i} + (e^{it}+e^{-it})\end{bmatrix}$$

$$= \frac{e^t}{2}\begin{bmatrix}+2\,\frac{e^{it}-e^{-it}}{i} + 2\cos t & -5\,\frac{e^{it}-e^{-it}}{i}\\ 2\sin t & -2\cdot 2\sin t + 2\cos t\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{e^t}{2}\begin{bmatrix}2\cdot 2\sin t + 2\cos t & -5\cdot 2\,\cancel{\cos t}\,\sin t\\ 2\sin t & -4\sin t + 2\cos t\end{bmatrix}$$

$$= e^t\begin{bmatrix}2\sin t + \cos t & -5\sin t\\ 2\sin t & -2\sin t + \cos t\end{bmatrix}$$

$$= e^t\sin t\begin{bmatrix}2 & -5\\ 2 & -2\end{bmatrix} + e^t\cos t\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

Obserwacja (też ważna!!!) jeśli $z = a+ib$ jest pierwiastkiem wielomianu charakterystycznego w rozwiązaniu pojawiają się wyrazy typu $e^{at}\sin(bt)$, $e^{at}\cos(bt)$

Możemy teraz na wektor danych początkowych $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ zadziałać obliczonym e^{At} :

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^t \sin t \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + e^t \cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= e^t \sin t \begin{bmatrix} -8 \\ -2 \end{bmatrix} + e^t \cos t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x(t) = e^t(\cos t - 8 \sin t)$$

$$y(t) = e^t(2 \cos t - 2 \sin t)$$

Udało nam się uzyskać rozwiązanie, jednak wymagało to sporo rachunków ze względu na konieczność używania liczb zespolonych. ~~Byłoby miło, gdybyśmy nauczyli się prostej lepszej metody wyznaczania~~ Przydałaby się jakaś efektywniejsza metoda rachunkowa. Tym bardziej, że zdarzają się także takie sytuacje:

$$\begin{cases} \dot{x} = 3x - y \\ \dot{y} = x + y \end{cases}$$

zaczynamy jak zwykle $B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$$w_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \cancel{a}\ (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 =$$

$$= 3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 1 = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2$$

Wielomian charakterystyczny ma tylko jeden pierwiastek! Ponadto równanie $(B - \lambda I)v = 0$ tzn. $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$ ma tylko jednowymiarową przestrzeń rozwiązań: $a - b = 0 \Rightarrow a = b \Rightarrow \begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Rozwiązaniami są wektory proporcjonalne do $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Nie można z nich wybrać bazy całej przestrzeni $\mathbb{R}^2$. Nie istnieje taka baza przestrzeni $\mathbb{R}^2$, że operator B jest w niej diagonalny. Mówimy w takim przypadku, że operator jest NIEDIAGONALIZOWALNY (ani nad $\mathbb{C}$, ani nad $\mathbb{R}$)

Cała koncepcja obliczania e^{At} (e^{Bt} w tym przypadku) poległa!

Nowa metoda, którą chciałabym teraz zaproponować oparta jest na dwóch podstawowych faktach:

1. W zbiorze wielomianów zdefiniowana jest operacja dzielenia z resztą. Np:

$$
\begin{array}{l}
\quad x^2 - 1 \\
\hline
(x^4 + 2x + 7) : (x^2 + 1) = \\
\underline{x^4 + x^2} \\
\quad -x^2 + 2x + 7 \\
\quad \underline{-x^2 - 1} \\
\qquad 2x + 8
\end{array}
$$

$$(x^4 + 2x + 7) = \underbrace{(x^2 - 1)}_{\text{iloraz}}(x^2 + 1) + \underbrace{(2x + 8)}_{\text{reszta}}$$

Ważna własność reszty: stopień wielomianu będącego resztą jest mniejszy od wielomianu będącego dzielnikiem.

Wyznaczanie ilorazu jest zazwyczaj dosyć pracochłonne, ale wyznaczanie reszty niekoniecznie. Zwłaszcza jeśli znamy pierwiastki wielomianu będącego dzielnikiem

Na przykład dla wcześniej przedstawionych wielomianów dzielnik $d(x) = x^2+1$ ma dwa zespolone pierwiastki $+i, -i$

$$d(x) = x^2+1 = (x-i)(x+i)$$

Oznaczmy teraz $u(x) = x^4 + 2x + 7$

$q(x) = x^2 - 1$ (iloraz)

$r(x) = 2x + 8$ (reszta)

Mamy

$$u(x) = q(x)\cdot d(x) + r(x)$$

Jeśli do powyższego równania podstawimy pierwiastki dzielnika otrzymamy:

$$u(i) = q(i)\underbrace{d(i)}_{=0} + r(i) = r(i)$$

$$u(-i) = q(-i)\underbrace{d(-i)}_{=0} + r(-i) = r(-i)$$

Wartości reszty na ~~wielomianie~~ pierwiastkach dzielnika są takie jak wielomianu u. Możemy wyznaczyć resztę r znając pierwiastki d. Jak to zrobić? Wiadomo, że r jest stopnia mniejszego od stopnia d. W naszym przypadku d jest stopnia 2 więc r musi być conajwyżej stopnia 1. Ogólnie mówiąc biorąc $r(x) = ax+b$ gdzie a i b są na razie niewiadome. Widzimy też, że

$$r(i) = \underline{ai+b} = u(i) = i^4 + 2i + 7 = \underline{2i+8}$$

$$r(-i) = \underline{-ai+b} = u(-i) = (-i)^4 + (-2i) + 7 = \underline{-2i+8}$$

Dostajemy układ równań na a i b:

$$\begin{cases} ai + b = 2i + 8 \\ -ai + b = -2i + 8 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \quad b = 8$$

$r(x) = 2x + 8$ tak jak [illegible]!

Spróbujmy z innym wielomianem. Podzielmy $u(x)$ (10)
przez $d_1(x) = (x-1)(x-2)$. Mamy dwa pierwiastki 1 i 2

$r(1) = \underline{a+b} = u(1) = 1+2+7 = \underline{10}$

$r(2) = \underline{2a+b} = u(2) = 2^4+4+7 = \underline{27}$

$$\begin{array}{l} a+b=10 \\ 2a+b=27 \\ \hline a=17 \\ b=-7 \end{array} \qquad r(x) = 17x - 7$$

Sprawdzam: $d_1(x) = (x-1)(x-2) = x^2-3x+2$

$$\begin{array}{l} \quad x^2+3x+7 \\ \hline x^4+2x+7 \ : \ x^2-3x+2 \\ x^4-3x^3+2x^2 \\ \hline \quad 3x^3-2x^2+2x+7 \\ \quad 3x^3-9x^2+6x \\ \hline \qquad 7x^2-4x+7 \\ \qquad 7x^2-21x+14 \\ \hline \qquad\quad 17x-7 \end{array}$$

tak miało wyjść!

Musimy jeszcze zastanowić się co robić z podwójnym pierwiastkiem. Weźmy $d_3(x) = (x-1)^2 = x^2-2x+1$

$$u(x) = q(x)(x-1)^2 + r(x)$$

Mamy jedno równanie $u(1) = r(1)$

A drugie uzyskamy różniczkując obie strony po x:

$$u'(x) = \underbrace{q'(x)(x-1)^2 + 2q(x)(x-1)}_{\text{znika w } x=1} + r'(x)$$

$$u'(1) = r'(1)$$

$r(x) = ax+b$

$r'(x) = a$

$u(1) = a+b$

$u'(1) = a$

Podstawiamy konkretną postać $u(x)$:

$$u(x) = x^4 + 2x + 7$$

$$u(1) = 1 + 2 + 7 = 10$$

$$u'(x) = 4x^3 + 2$$

$$u'(1) = 4 + 2 = 6$$

$$\begin{cases} a + b = 10 \\ a = 6 \end{cases} \rightarrow b = 4$$

$$r(x) = 6x + 4$$

Sprawdzam:

$$x^2 + 2x + 3$$

$$(x^4 + 2x + 7) : (x^2 - 2x + 1)$$

$$x^4 - 2x^3 + x^2$$

$$2x^3 - x^2 + 2x + 7$$

$$2x^3 - 4x^2 + 2x$$

$$3x^2 + 7$$

$$x^2 - 6x + 3$$

$$\cancel{9x + 1}$$

$$6x + 4$$

tak miało wyjść!!

2. Drugi podstawowy fakt to tak naprawdę twierdzenie

Twierdzenie (Cayley-Hamilton) Niech w_A oznacza wielomian charakterystyczny macierzy A, tzn $w_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbb{1})$ Wówczas

$$W_A(A) = 0$$

Dzięki temu możemy w miarę łatwo obliczyć dowolnie wysokiego stopnia wielomian od argumentu macierzowego. Znajdźmy np.

$$B^{2012}$$

$u(x) = x^{2012}$ $\quad u(B) = B^{2012}$

$\omega_B(x) = (x-2)^2$

Zgodnie ze wzorem na dzielenie z resztą

to jest drugiego stopnia

$$u(x) = q(x)\cdot \omega_B(x) + r(x)$$

to nas nie obchodzi

to jest pierwszego stopnia

$$u(B) = q(B)\cdot \underbrace{\omega_B(B)}_{=0.} + r(B) \quad \Rightarrow \quad u(B) = r(B)$$

Zamiast liczyć potęgi 2012 macierzy wystarczy, że obliczymy wartość wielomianu stopnia pierwszego

Trzeba tylko znaleźć $r(x)$

$$x^{2012} = q(x)(x-2)^2 + \underbrace{ax+b}_{r(x)}$$

$$2^{2012} = 2a + b \to b = \cancel{2}\cdot 2^{2012} - 2a =$$

$$2012\cdot 2^{2011} = a \qquad = 2^{2012} - 2\cdot 2012\cdot 2^{2011} =$$

$$= -2011\cdot 2^{2012}$$

$$r(x) = 2012\cdot 2^{2011}x - 2011\cdot 2^{2012} =$$

$$= \cancel{2Q}\; 2^{2011}(2012x - 4022)$$

$$B^{2012} = r(B) = 2^{2012}\left(2012\cdot\begin{bmatrix}3 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix} - 4022\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right) =$$

$$\cancel{= 2^{2012}\left(\begin{bmatrix}2012 & -2012\\ 2012 & -2012\end{bmatrix}\right) = 2012\cdot 2^{2012}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & -1\end{bmatrix}}$$

ooo

Można też elegancko wyrazić B^n

$u(x) = x^n \qquad u(x) = q(x)\cdot \omega_B(x) + r(x)$

$$x^n = q(x)(x-2)^2 + (ax+b)$$

$$nx^{n-1} = q'(x)(x-2)^2 + q(x)(x-2)\cdot 2 + a$$

$2^n = 2a+b$

$n\cdot 2^{n-1} = a \qquad b = 2^n - 2\cdot n\cdot 2^{n-1} = 2^n(1-n)$

$$r(x) = n\cdot 2^{n-1}x + 2^n(1-n) = $$
$$= 2^{n-1}\left(nx + 2(1-n)\right)$$

$$B^n = r(B) = 2^{n-1}\left(n\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + (2-2n)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) =$$
$$= 2^{n-1}\begin{bmatrix} n+2 & -n \\ n & -n+2 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{B^n = 2^{n-1}\begin{bmatrix} n+2 & -n \\ n & -n+2 \end{bmatrix}}$$

Ostatnim krokiem na drodze do efektywnego obliczania e^{Bt} jest następujące twierdzenie:

TWIERDZENIE

Dla każdej funkcji analitycznej σ (na przykład $t \mapsto e^t$) i wielomianu $d(x)$ istnieją funkcja analityczna q i wielomian r takie że

$$\sigma(x) = q(x)d(x) + r(x)$$

i $\deg r < \deg d$

Mówiąc nieco mniej precyzyjnie – można dzielić funkcje analityczne przez wielomiany.
Zastosujmy tę metodę do policzenia e^{Bt}

$$e^{xt} = q(x)\,w_B(x) + r(x)$$

$$e^{xt} = q(x)(x-2)^2 + ax + b \quad \Big/ \text{pochodna}$$

$$te^{xt} = q'(x)(x-2)^2 + 2q(x)(x-2) + a$$

$$e^{2t} = 2a + b$$

$$te^{2t} = a$$

$$\begin{cases} e^{2t} = 2a + b \\ te^{2t} = a \end{cases} \Rightarrow \quad b = e^{2t} - 2a = e^{2t} - 2te^{2t} = e^{2t}(1-2t)$$

$$r(x) = te^{2t}x + e^{2t}(1-2t)$$

$$e^{Bt} = r(B) = te^{2t}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + e^{2t}(1-2t)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= e^{2t}\begin{bmatrix} 3t + 1 - 2t & -t \\ t & t + 1 - 2t \end{bmatrix} =$$

$$= e^{2t}\begin{bmatrix} t+1 & -t \\ t & -t+1 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie ogólne układu równań różniczkowych

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = e^{2t}\begin{bmatrix} t+1 & -t \\ t & -t+1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

W ten sposób poradziliśmy sobie z problemem podwójnej wartości własnej! Przy okazji uzyskana metoda rachunkowa jest chyba najszybszym sposobem uzyskania rozwiązania układu równań różniczkowych liniowych.

Zanotujmy jeszcze następujące obserwacje

1° w rozwiązaniach występują wyrazy typu $e^{\lambda t}$, gdzie λ jest wartością własną

2° jeśli wartości własne są zespolone w rozwiązaniach należy spodziewać się sinusów i cosinusów

3° jeśli wartości własne są wielokrotne w rozwiązaniach należy spodziewać się wyrażeń wielomianowych i wykładniczych.