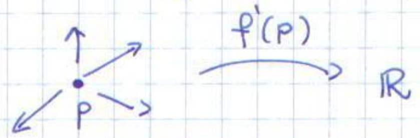
Na wykładzie w zeszłym tygodniu nauczyliśmy się obliczać pochodną funkcji wielu zmiennych rzeczywistych. Okazało się, że pochodna funkcji $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ w punkcie $p \in \mathbb{R}^n$ jest odwzorowaniem liniowym określonym na wektorach zaczepionych w punkcie p:



Pochodną, jak każde odwzorowanie liniowe zapisać można jako macierz, jeśli użyjemy bazy. Zazwyczaj korzystamy z bazy związanej z układem współrzędnych. W takiej sytuacji wyrazy macierzowe są pochodnymi cząstkowymi funkcji po ~~konkretnych~~ kolejnych współrzędnych.

$$f'(p) = \left[\frac{\partial f}{\partial x^1}(p), \frac{\partial f}{\partial x^2}(p) \dots , \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) \right]$$

Wprowadziliśmy także szczególną notację

$$f'(p) = df(p) \quad (\text{albo } df \text{ - pomijamy punkt})$$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial f}{\partial x^2} dx^2 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x^n} dx^n$$

Oznaczając pochodne funkcji współrzędnościowych, które jako macierze wyglądają tak $[1\ 0 \dots 0]$, $[0\ 1\ 0 \dots 0]$ ... $[0\ 0 \dots 0\ 1]$ symbolami $dx^1, dx^2 \dots dx^n$.

FORMY RÓŻNICZKOWE Możemy tworzyć teraz kombinacje liniowe różniczek dx^i z różnymi współczynnikami, które nie koniecznie muszą być pochodnymi cząstkowymi jakiejś funkcji. Np na $\mathbb{R}^2$ forma $\alpha = ydx - xdy$ nie jest różniczką żadnej funkcji. Gdyby była różniczką to wtedy (np. niech funkcja nazywa się g)

$$\alpha = ydx - xdy \stackrel{?}{=} \frac{\partial g}{\partial x}dx + \frac{\partial g}{\partial y}dy$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y \qquad \frac{\partial g}{\partial y} = -x$$

$$g(x,y) = yx + f(x) \qquad g(x,y) = -xy + \overset{h}{g}(y)$$

$$yx + f(x) = -xy + h(y)$$

takie f i h nie istnieją

Przyzwoicie regularne funkcje mają równe mieszane pochodne cząstkowe wyższych rzędów

tzn. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)$

jeśli więc $\frac{\partial g}{\partial x} = y$ i $\frac{\partial g}{\partial y} = -x$

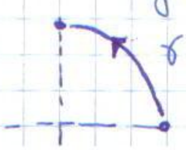
to powinno być:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(y) = 1 \stackrel{?}{=} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(-x) = -1$$

te rzeczy nie są równe

to znaczy forma α nie jest różniczką funkcji

Formy nadają się bardzo dobrze do całkowania wzdłuż krzywych. Postępujemy według następującego przepisu (który objaśnimy na przykładzie całkowania formy α po ćwiartce okręgu o promieniu 1:

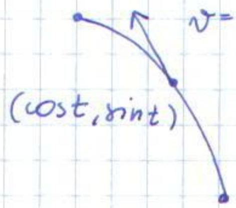


PRZEPIS

1. Parametryzujemy krzywą

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \pi/2]$$

2. Znajdujemy wektor styczny do krzywej (prędkość)



$$v = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix} = -\sin t \, e_x + \cos t \, e_y$$

3. Obliczamy formę $\alpha = y\,dx - x\,dy$ na tym wektorze stycznym. Forma w ustalonym punkcie jest odwzorowaniem liniowym na wektorach stycznych zaczepionych w tym punkcie. Można obliczyć jej wartość na wektorze stycznym do krzywej

$$\langle y\,dx - x\,dy, -\sin t \, e_x + \cos t \, e_y \rangle \Big|_{\substack{x = \cos t \\ y = \sin t}} =$$

$$= -\sin^2 t - \cos^2 t = -1$$

4. Dostajemy funkcję zmiennej t, którą całkujemy w sensie Riemanna po całym zakresie zmienności parametru:

$$\int_0^{\pi/2} (-1)\,dt = -\pi/2.$$

Jeśli ten przepis ma sens nie powinien zależeć od ~~wartości~~ sposobu parametryzacji krzywej. Sprawdźmy, czy tak jest istotnie:

Ten sam kawałek okręgu parametryzujemy inaczej

$$s \in [0,1] \quad \gamma(s) = \left(\sqrt{1-s^2}\,,\ s\right)$$

$$\alpha(\gamma(s)) = s\,dx - \sqrt{1-s^2}\,dy$$

$$\dot\gamma(s) = -\frac{s}{\sqrt{1-s^2}}\,e_x + e_y$$

$$\langle \alpha(\gamma(s)), \dot\gamma(s)\rangle = -\frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}} + \left(-\sqrt{1-s^2}\right) =$$

$$= -\frac{s^2 - 1 + s^2}{\sqrt{1-s^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$$

$$-\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = -\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}} = \int_{\pi/2}^{0} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\sin\varphi} =$$

$$s = \cos\varphi$$
$$ds = -\sin\varphi\, d\varphi$$

$$= -\pi/2$$

Spróbujmy jeszcze innej parametryzacji

$$r \in [0,1] \quad \gamma(r) = \left(r,\ \sqrt{1-r^2}\right)$$

$$\alpha(\gamma(r)) = \sqrt{1-r^2}\,dx - r\,dy$$

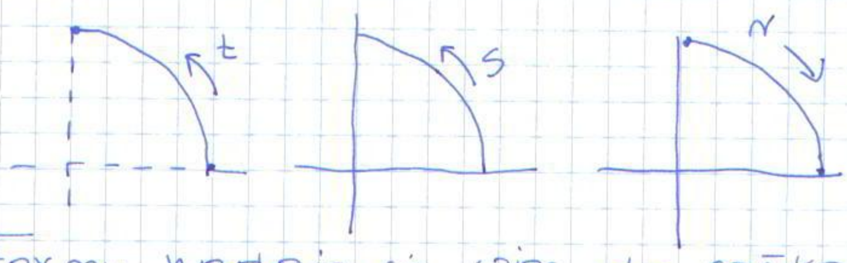
$$\dot\gamma(r) = e_x - \frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\,e_y$$

$$\langle \alpha(\gamma(r)), \dot\gamma(r)\rangle = \sqrt{1-r^2} + \frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\,dr = \pi/2$$

inny znak!!!

Popatrzmy jak zmieniają się parametry



Formy nadają się więc do całkowania po krzywych zorientowanych! Wartość całki nie zależy od parametryzacji. Zmienia jedynie znak, gdy parametr biegnie w drugą stronę.
Zanotujmy więc:

Formy różniczkowe na $\mathbb{R}^n$ są to wyrażenia postaci

$$\alpha = f_i(x^1 \dots x^n)\, dx^i \quad (\text{sumujemy po } i)$$

gdzie dx^i oznacza pochodną funkcji $\mathbb{R}^n \ni (x^1 \dots x^n) \longmapsto x^i \in \mathbb{R}^n$

Inaczej mówiąc forma różniczkowa jest to przyporządkowanie każdemu punktowi $p \in \mathbb{R}^n$ odwzorowania liniowego działającego na wektorach zaczepionych w tym punkcie

Formy różniczkowe nadają się do całkowania po krzywych zorientowanych. Całka wykonana według przepisu nie zależy od wyboru parametryzacji jeśli tylko parametr rośnie w kierunku zgodnym z orientacją

Jako kolejny przykład całkowania formy różniczkowej wzdłuż krzywej obliczmy pracę w przemianie adiabatycznej gazu doskonałego. Forma, całkowanie której daje pracę, to $\omega = p\,dV$. Forma ta żyje na przestrzeni $\mathbb{R}^3$, której współrzędnymi są (p, V, T). Żeby wykonać całkowanie musimy wiedzieć jakiej krzywej w $\mathbb{R}^3$ odpowiada przemiana adiabatyczna. Z całą pewnością krzywa ta musi leżeć na powierzchni zadanej równaniem stanu $pV = nRT$.

Z definicji przemiana adiabatyczna jest to taka w której nie dochodzi do kontaktu cieplnego z otoczeniem. Cała zmiana energii wewnętrznej związana jest z wykonaniem pracy, mamy więc

$$dU + p\,dV = 0$$

Wiadomo, że dla gazu doskonałego energia wewnętrzna zależy jedynie od temperatury, co oznacza, że $dU = \frac{\partial U}{\partial T} dT$

Przy okazji możemy zinterpretować $\frac{\partial U}{\partial T}$ - rozważmy przez chwilę przemianę izochoryczną. Układ nie wykonuje wówczas pracy $\cancel{(dV \neq 0)}$ (dV na takiej krzywej jest $= 0$) zatem zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki cała zmiana energii wewnętrznej związana jest z ciepłem

$dU = \delta Q \quad \frac{\partial U}{\partial T} dt = \delta Q$ zatem $\frac{\partial U}{\partial T}$ to ciepło właściwe przy stałej objętości C_v (przemiana izochoryczna)

Wracając do kwestii adiabatycznej mamy (10)

$$C_V dT = -p dV$$

a zgodnie z równaniem stanu $pV = nRT$

$p = \frac{nRT}{V}$ czyli

$$C_V dT = -\frac{nRT}{V} dV$$

Krzywa w zmiennych (p, V, T) odpowiadająca przemianie adiabatycznej spełniać więc musi powyższe równanie różniczkowe, które (na szczęście) da się łatwo rozwiązać

$$C_V dT = -\frac{nRT}{V} dV \qquad \frac{C_V}{T} dT = -nR \frac{dV}{V}$$

$$C_V \log T = -nR \underbrace{\frac{dV}{V}}_{\log V} + \underbrace{\text{const}}_{A}$$

$$\log T = -\frac{nR}{C_V} \log V + \underbrace{A}_{\log a} \qquad a > 0.$$

$$\log T + \frac{nR}{C_V} \log V = \log a$$

$$\log \left[T \cdot V^{(nR/C_V)} \right] = \log a$$

$$T \cdot V^{(nR/C_V)} = a \ (\text{const.})$$

W przemianie adiabatycznej $T \cdot V^{nR/C_V}$ jest więc stałe. Możemy zatem znaleźć krzywą leżącą na powierzchni $pV = nRT$ i odpowiadającą przemianie adiabatycznej oraz przechodzącą przez konkretny punkt początkowy.

oznaczamy chwilowo przez $\overset{\varkappa}{\cancel{A}}$ wykładnik (11)

$\kappa = {}^{nR}/_{C_v}$ Mamy więc

$$\begin{cases} pV = nRT \\ T \cdot V^{\varkappa} = T_0 V_0^{\varkappa} \end{cases}$$

\+ ~~obrazki adiabaty~~

Krzywą będziemy parametryzować V, tzn. mamy

$$T(V) = T_0 \left(\frac{V_0}{V}\right)^{\varkappa}$$

$T = T_0 \frac{1}{V^2}$

$$P(V) = nR\,\frac{T}{V} = nR\,\frac{T_0 V_0^{\varkappa}}{V \cdot V^{\varkappa}} =$$

$p = \frac{nR}{1} \frac{T_0}{V^3}$

$T_0 = 1$

$$= nR\,\frac{T_0 V_0^{\varkappa}}{V^{\varkappa+1}}$$

całkujemy teraz $\omega = pdV$ po takiej krzywej od V_0 do V_1:

$$\int_\gamma p dV = \int_{V_0}^{V_1} nR\,\frac{T_0 V_0^{\varkappa}}{V^{\varkappa+1}}\,dV = nRT_0V_0^{\varkappa}\int_{V_0}^{V_1}\frac{dV}{V^{\varkappa+1}} =$$

$$= nRT_0V_0^{\varkappa}\left(-\frac{1}{V^{\varkappa}}\right)\Bigg|_{V_0}^{V_1}\frac{1}{\varkappa} =$$

$$= \frac{\cancel{nR}}{\cancel{nR}} \cdot C_v \cdot T_0 V_0^{\varkappa}\left[-\frac{1}{V_1^{\varkappa}} + \frac{1}{V_0^{\varkappa}}\right] =$$

$$= T_0 C_v \left(1 - \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\varkappa}\right)$$

$c_p = \left(\frac{3}{2}nR\right)$

$c_v = \frac{1}{2}nR$

przyjrzyjmy się jeszcze wykładnikowi $\varkappa$. W przemianie izobarycznej $dU = \delta Q + pdV$ dostarczane ciepło zużywane jest na zmianę temperatury (czyli energii wewnętrznej) oraz na wykonanie pracy

Krzywą reprezentującą przemianę izobaryczną będziemy parametryzować temperaturą
Na tej krzywej mamy

$$dU = \delta Q - p\,dV \qquad Vp = nRT$$

$$V = \frac{nRT}{p}$$

$$dV = \frac{nR}{p}\,dT$$

$$\frac{\partial U}{\partial T}dT = \delta Q - \cancel{p}\frac{nR}{\cancel{p}}\,dT$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T} + nR\right)dT = \delta Q$$

$$C_v + nR = C_p$$

$$C_v - C_p = -nR \longrightarrow \boxed{C_p - C_v = nR}$$

$$\kappa = \frac{nR}{C_v} = \frac{-C_v + C_p}{C_v} = -1 + \gamma \qquad \text{gdzie } \gamma = C_p/C_v$$

$$\kappa = -1 + \frac{3/2}{1/2} =$$

$$-1 + 3 = 2$$

$$\kappa = 2$$

Umiejętność całkowania form różniczkowych przydaje się także do obliczania długości krzywych. Pojęcie długości związane jest z pojęciem iloczynu skalarnego!!! Żebyśmy mogli mierzyć długość (wektorów, krzywych ...) potrzebujemy do tego narzędzia. Na przykład na przestrzeni wektorowej wielomianów stopnia nie większego niż dwa ($\mathbb{R}_2[\cdot]$) nie ma wyróżnionego iloczynu skalarnego, dlatego rzadko mówimy o „długości wielomianu" czy o „kącie między wielomianami". Na $\mathbb{R}^n$ mamy za to dobrze nam znany iloczyn skalarny, który w bazie kanonicznej (we współrzędnych) wygląda tak

$$(v|w) = \sum_{i=1}^{n} v^i w^i \qquad v = v^i e_i \quad w = w^i e_i$$

e_i – wektory bazy kanonicznej

Baza kanoniczna jest ortonormalna względem tego ~~ukła~~ iloczynu skalarnego co oznacza, że wektory są prostopadłe i mają długość 1. Długość wektora to

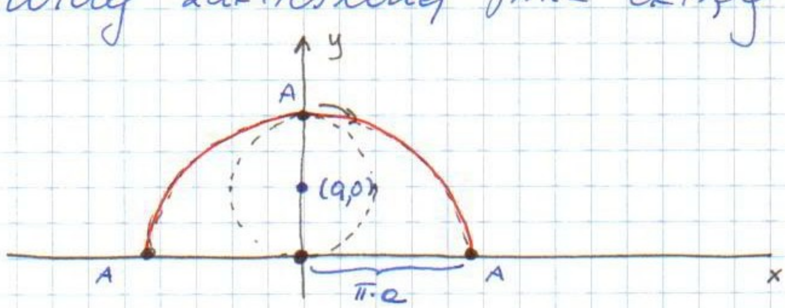
$$\|v\| := \sqrt{(v|v)}$$

a kąt α między wektorami:

$$\cos\alpha = \frac{(v|w)}{\|v\|\,\|w\|}$$

Skoro $\mathbb{R}^n$ ma iloczyn skalarny to także każda z przestrzeni wektorów zaczepionych w punkcie $p \in \mathbb{R}^n$ też ma iloczyn skalarny możemy więc mierzyć długość wektora stycznego. Długość krzywej ~~nie~~ jest to całka z długości wektora stycznego do tej krzywej

Całka ta także nie zależy od parametryzacji krzywej. Całkujemy tu pewną jednoformę, ale określoną jedynie na krzywej, a nie na całym $\mathbb{R}^n$ w którym ta krzywa jest zanurzona. Jako przykład policzmy długość cykloidy zakreślonej przez okrąg o promieniu a



Okrąg obraca się względem swojego środka, a środek porusza się równolegle do osi x tak, że gdy punkt A znajdzie się na osi jego odległość od $(0,0)$ będzie równa πa (pół obwodu) Jeśli obrót parametryzujemy kątem φ to ruch środka opisany jest krzywą (prostą)

$$\gamma_1(\varphi) = (a\cdot\varphi,\ a)$$

Punkt A porusza się więc po krzywej (ruch środka + obrót)

$$\gamma(\varphi) = \left(a\varphi + a\overset{\sin\varphi}{\cancel{\cos\varphi}},\ a\overset{\cos\varphi}{\cancel{\sin\varphi}} + a\right)$$

Dla jednej „arkady" cykloidy $\varphi \in [-\pi, \pi]$

Obliczmy wektor styczny

$$\dot\gamma(\varphi) = \begin{bmatrix} a + a\cos\varphi \\ -a\sin\varphi \end{bmatrix} = (a + a\cos\varphi)e_x + (-a\sin\varphi)e_y$$

Długość tego wektora to:

korzystamy z ortonormalności bazy (e_x, e_y)

$$\|\dot{\gamma}(0)\| = \sqrt{(a+a\cos\varphi)^2 + (-a\sin\varphi)^2} =$$

$$= \sqrt{a^2 + 2a^2\cos\varphi + \underbrace{a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi}} =$$

$$= \sqrt{a^2 + 2a^2\cos\varphi + a^2}$$ jedynka trygonometryczna

$$= \sqrt{2a^2 + 2a^2\cos\varphi} = a\sqrt{2}\sqrt{1+\cos\varphi} =$$

$$= a\sqrt{2}\sqrt{2\cos^2\varphi/2} =$$

pewien wzór trygonometryczny

$$1+\cos\varphi = \cos^2\varphi/2 + \sin^2\varphi/2 + \cos^2\varphi/2 - \sin^2\varphi/2 = 2\cos^2\varphi/2$$

$$= a\sqrt{2}\sqrt{2}\cos\varphi/2 =$$

gdy $\varphi \in [-\pi, \pi]$ to $\varphi/2 \in [-\pi/2, \pi/2]$ a w tym przedziale cos jest dodatni.

$$= 2a\cos\varphi/2$$

Forma do całkowania to $2a\cos\varphi/2\, d\varphi$. Ze względu na to, że jej całkowanie prowadzi do obliczenia długości (l jak length) nazywa się ją często dl.

Długość cykloidy

$$\int_{-\pi}^{\pi} 2a\cos\varphi/2\, d\varphi = 2a\int_{-\pi}^{\pi}\cos\varphi/2\, d\varphi = 2a\cdot 2\sin\varphi/2\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= 4a\left(\sin\pi/2 - \sin\left(-\pi/2\right)\right) = 4a\cdot\left(1-(-1)\right) =$$

$$= 8a.$$