1

W rachunku różniczkowym funkcji jednej zmiennej istnieje kilka sposobów badania typu punktu krytycznego. Jeśli funkcja jest raz różniczkowalna wiadomo, że ~~a~~ pochodna w punkcie krytycznym jest zero (jest to sama definicja punktu krytycznego) Możemy więc badać czy w tym punkcie pierwsza pochodna zmienia znak: jeśli z dodatniego na ujemny mamy maksimum $\nearrow\searrow$ jeśli z ujemnego na dodatni mamy minimum $\searrow\nearrow$. Są także przypadki w których funkcja w x_0 nie jest różniczkowalna, ale pochodna w otoczeniu istnieje i zmienia znak np. dla funkcji

$$x \longmapsto \sqrt[3]{x(x-1)^2} = x^{1/3}(x-1)^{2/3}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}(x-1)^{2/3} + x^{1/3}\frac{2}{3}(x-1)^{-1/3} =$$

$$= x^{-2/3}(x-1)^{-1/3}\left\{\frac{1}{3}(x-1) + \frac{2}{3}x\right\} =$$

$$= \frac{x - 1/3}{\sqrt[3]{x^2(x-1)}}$$

f' jest nieokreślona w $x=0$ i $x=1$ (mianownik $=0$)

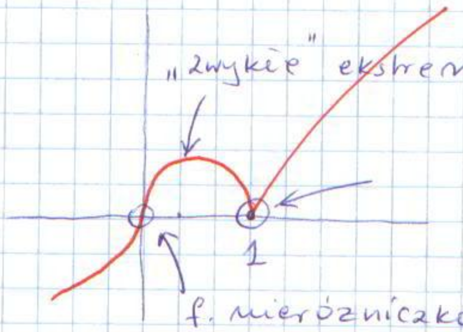
ale

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x-1/3}{\sqrt[3]{x^2(x-1)}} = +\infty = \lim_{x\to 0^+} \frac{x-1/3}{\sqrt[3]{x^2(x-1)}}$$

czyli w $x=0$ pochodna nie zmienia znaku

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-1/3}{\sqrt[3]{x^2(x-1)}} = -\infty \qquad \lim_{x\to 1^+} \frac{x-1/3}{\sqrt[3]{x^2(x-1)}} = +\infty$$

W $x = 1$ pochodna zmienia znak. W obu tych punktach funkcja jest ciągła (tyle, że nieróżniczkowalna) W $x = 0$ nie ma więc ekstremum a w $x = 1$ jest. ~~Wykres~~ Pochodna znika ponadto w $x = 1/3$ i zmienia znak z + na -, mamy więc maksimum. Wykres:



Druga metoda polega na przybliżeniu danej funkcji funkcją kwadratową i działa jedynie dla funkcji różniczkowalnej przynajmniej dwa razy. Na przykład $x \xmapsto{f} \sin x$ w punkcie $\pi/2$ ma jak wiadomo maksimum. Przybliżenie:

$$f(\pi/2) = 1$$

$$f'(\pi/2) = 0 \quad \text{(punkt krytyczny)}$$

$$= \cos(x)\Big|_{x=\pi/2}$$

$$f''(x) = -\sin(x)\Big|_{x=\pi/2} \to f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

Stosujemy wzór Taylora:

$$f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) + f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\cdot h + \frac{1}{2!} f''\left(\frac{\pi}{2}\right) h^2 + R_2\left(\frac{\pi}{2}, h\right)$$

$$\frac{R_2(\pi/2, h)}{h^2} \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

Reszta

$$f\left(\frac{\pi}{2}+h\right) = 1 + 0 \cdot h + \frac{1}{2!}(-1)h^2 + R_2\left(\tfrac{\pi}{2}, h\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{2!}h^2 + R_2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}h^2 + R_2$$

3

$$x = \frac{\pi}{2} + h \qquad h = -\tfrac{\pi}{2} + x$$

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^2 + R_2(x)$$

$$\sin(x) \approx 1 - \tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^2$$

przybliżenie

decydujący współczynnik

$$R_2(x) = \sin x - 1 + \tfrac{1}{2}\left(x - \tfrac{\pi}{2}\right)^2$$

Na obrazku obserwujemy że w pobliżu $x = \pi/2$ Reszta jest istotnie bardzo mała więc o zachowaniu funkcji (w sensie ekstremum) decyduje kwadratowe przybliżenie, w szczególności zaznaczony na czerwono współczynnik. Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola. Jeśli parabola ma „uszy do góry" V (tzn. współczynnik dodatni) to jest minimum a jeśli do dołu to jest maksimum. Jeśli współczynnik jest zero, to nie wiadomo. i trzeba stosować inne metody. Widać więc, że wszystko zależy od znaku drugiej pochodnej, bo ten współczynnik to $\frac{1}{2!} f''(\pi/2)$.

Teraz to samo musimy zrobić dla funkcji wielu (na przykład dwóch) zmiennych. Trzeba umieć przybliżyć daną funkcję funkcją kwadratową. Tylko co to jest funkcja kwadratowa dwóch zmiennych?

Zaczniemy od prostej funkcji i, nie wnikając w teorię spróbujemy zrobić tak, żeby było dobrze. Potem przejdziemy do teorii, bo dla mniej prostych funkcji tak łatwo zgadnąć się już nie da:

Prosta funkcja od której zaczniemy to ta na której uczyliśmy się różniczkować

$$(x,y) \xmapsto{f} x^2 y$$

znowu będziemy ją badać w otoczeniu punktu $p=(1,2)$, tylko tym razem z większą dokładnością niż w przypadku poprzednim:

$$f(1+h_x, 2+h_y) = (1+h_x)^2(2+h_y) =$$

$$= (1+h_x^2+2h_x)(2+h_y) =$$

$$= (2 + \underbrace{2h_x^2} + \underbrace{4h_x + h_y}_{\text{liniowe}} + h_x^2 h_y + \underbrace{2h_x h_y}_{\text{kwadratowe}}) =$$

$$= 2 + \begin{bmatrix} 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \end{bmatrix} + 2h_x^2 + 2h_x h_y + \underbrace{h_x^2 h_y}_{\text{reszta}}$$

Reszta $R_2(h)$ jest to ta część, która podzielona przez $\|h\|^2$ znika jak $h \to 0$. Musi więc być „na oko" rzędu przynajmniej $2+\varepsilon$ w naszym przypadku 3

5

$$\frac{|R_2(h)|}{\|h\|^2} = \frac{|h_x^2 h_y|}{h_x^2+h_y^2} = \frac{h_x \overbrace{|h_x h_y|}^{\leq \frac{1}{2}(h_x^2+h_y^2)}}{h_x^2+h_y^2} \leq$$

$$\leq \frac{h_x \cdot \frac{1}{2}\cancel{(h_x^2+h_y^2)}}{\cancel{h_x^2+h_y^2}} = \frac{1}{2}h_x \xrightarrow{h \to 0} 0$$

Funkcje kwadratowe jednej zmiennej

$$x \longmapsto ax^2 + \underbrace{bx}_{\text{część liniowa}} + \overset{\text{stała}}{c}$$

Funkcje kwadratowe wielu zmiennych

$$(x,y) \longmapsto \underbrace{ax^2 + by^2 + cxy}_{\text{część kwadratowa}} + \underbrace{dx + ey}_{\text{część liniowa}} + \overset{\text{stała}}{f}$$

to też jest wyraz kwadratowy.

Kiedy badamy zachowanie w punkcie krytycznym część liniowa znika i funkcja jest przybliżana jedynie częścią kwadratową

$$g(x,y) = x^2y + x^2 + 2xy$$

Szukamy punktów krytycznych:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2xy + 2x + 2y \quad (*)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x^2 + 2x \rightarrow x(x+2)=0 \rightarrow x=-2 \text{ lub } x=0$$

gdy $x=-2$

z $(*)$ dostajemy

$$-4y - 4 + 2y = 0$$

$$-2y = 4 \quad y = -2$$

punkt krytyczny

$(-2,-2) \longrightarrow$ zbadamy ten, bo jest ciekawszy

gdy $x=0$

z $(*)$ dostajemy

$y=0$

punkt krytyczny $(0,0)$

$$g(-2+\delta x, -2+\delta y) = (\delta x-2)^2(\delta y-2) + (\delta x-2)^2 + 2(\delta x-2)(\delta y-2) =$$

$$= (\delta x^2 - 4\delta x + 4)(\delta y - 2) + \delta x^2 - 4\delta x + 4 + 2(\delta x\delta y - 2\delta y - 2\delta x + 4) =$$

$$= \delta x^3 \delta y - \underline{4\delta x\delta y} + 4\delta y - \underline{2\delta x^2} + 8\delta x - 8 + \underline{\delta x^2} - 4\delta x + 4 + \underline{2\delta x\delta y} - 4\delta y$$

$$-4\delta x + 8 = 4 + \delta x\underbrace{(8-4-4)}_{=0} + \delta y\underbrace{(4-4)}_{0} + (-4)\delta x\delta y +$$

$$(-2)\delta x^2 + \delta x^2 + 2\delta x\delta y + \delta x^2\delta y =$$

$$= \underbrace{4}_{\text{stałe}} + \underbrace{(-1)\delta x^2 - 2\delta x\delta y}_{\text{kwadratowe}} + \underbrace{\delta x^2\delta y}_{\text{reszta}}$$

$x = -2 + \delta x$

$\delta x = x+2$

$\delta y = y+2$

$$h = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix}$$

przybliżenie ⑦

$$g(x,y) \approx 4-(x+2)^2-2(x+2)(y+2)$$

Reszta $(x+2)^2(y+2)$

Reszta w okolicy punktu $(-2,-2)$ jest bardzo mała, więc część kwadratowa dominuje.
Na oko widać, że nie jest to ekstremum tylko siodło.

Na dwuwymiarowej przestrzeni $\mathbb{R}^2$ mamy kilka typów wyrażeń kwadratowych:

I tylko jeden kwadrat:

$(x,y)\longmapsto x^2$, $(x,y)\longmapsto(x+y)^2$, $(x,y)\longmapsto(y-2x)^2$
wszystkie wykresy wyglądają podobnie ?
brak ekstremum - punkt krytyczny zdegenerowany lub jest ekstremum ale potrzeba wyższych pochodnych

II suma kwadratów

$(x,y)\longmapsto x^2+y^2$ $(x,y)\longmapsto(x+y)^2+(x-y)^2$

znowu wykresy wyglądają podobnie $\to$ minimum

III suma kwadratów pomnożona przez (-1)

$(x,y)\longmapsto -x^2-y^2$ ...
podobnie jak II tylko „do góry nogami" $\to$ maksimum

IV różnica kwadratów

$(x,y)\longmapsto x^2-y^2$, $(x,y)\to(xy)$, $(x,y)\longmapsto(x+y)^2-y^2$

znowu podobne wykresy $\to$ siodło (brak ekstremum)

Jak rozpoznać który typ? Weźmy części kwadratowe funkcji g w otoczeniu punktu $(-2,-2)$ wyrażone w zależności od współrzędnych przyrostu $h=\begin{bmatrix}\delta x\\ \delta y\end{bmatrix}$

8

$-\delta x^2 - 2\delta x\delta y$ ← spróbujemy zbadać jaki to typ

$$-\delta x^2 - 2\delta x \delta y = -(\delta x^2 + 2\delta x\delta y) = -(\underbrace{\delta x^2 + 2\delta x\delta y + \delta y^2} - \delta y^2)$$
$$= -((\delta x + \delta y)^2 - \delta y^2) = -(\delta x + \delta y)^2 + \delta y^2$$

jeden minus i jeden plus
typ IV - różnica kwadratów
→ siodło.

Można też inaczej, ale typ się nie zmieni!
Np to samo wyrażenie można zapisać jako

$$-3\left(\frac{1}{3}\delta x + \frac{2}{3}\delta y\right)^2 + \frac{1}{3}(\delta y - \delta x)^2$$

znowu jeden minus i jeden plus!

Widać, że potrzebujemy trochę teorii
→ jak znajdować kwadratowe przybliżenie dla funkcji innych niż wielomianowe?

→ jak opisywać i badać funkcje kwadratowe na przestrzeni wektorowej

$$= \sum_i v^i \sum_j w^j Q(e_i, e_j) = \sum_{i,j} v^i w^j \underbrace{Q(e_i, e_j)}_{Q_{ij}}$$

9

Np dla $n = 2$ mamy:

$$v = v^1 e_1 + v^2 e_2 \qquad w = w^1 e_1 + w^2 e_2$$

$$Q(v, w) = Q(v^1 e_1 + v^2 e_2, w^1 e_1 + w^2 e_2) =$$

$$= v^1 Q(e_1, w^1 e_1 + w^2 e_2) + v^2 Q(e_2, w^1 e_1 + w^2 e_2) =$$

$$= v^1 w^1 Q(e_1, e_1) + v^1 w^2 Q(e_1, e_2) + v^2 w^1 Q(e_2, e_1) +$$
$$+ v^2 w^2 Q(e_2, e_2) =$$

$$= v^1 w^1 Q_{11} + v^1 w^2 Q_{12} + v^2 w^1 Q_{21} + v^2 w^2 Q_{22}$$

liczby definiujące formę dwuliniową.

Zauważmy, że można to samo zapisać macierzowo w następujący sposób

$$\underbrace{[v^1 \;\; v^2]}_{([v]^e)^T} \underbrace{\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} w^1 \\ w^2 \end{bmatrix}}_{[w]^e}}_{\begin{bmatrix} Q_{11} w^1 + Q_{12} w^2 \\ Q_{21} w^1 + Q_{22} w^2 \end{bmatrix}} =$$

$$= Q_{11} w^1 v^1 + Q_{12} w^2 v^1 + Q_{21} w^1 v^2 + Q_{22} v^2 w^2$$

to samo

FORMY KWADRATOWE NA PRZESTRZENI WEKTOROWEJ:

(10)

Funkcje kwadratowe, które pojawiają się w analizie funkcji wielu zmiennych są to funkcje, które powstają w pewien szczególny sposób.

1) Zaczynamy od odwzorowań dwuliniowych na przestrzeni wektorowej

$Q: V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

(tego rodzaju odwzorowaniem jest iloczyn skalarny, tensor bezwładności bryły sztywnej itd...)

własności $\begin{cases} Q(\alpha v_1 + \beta v_2, w) = \alpha Q(v_1, w) + \beta Q(v_2, w) \\ Q(v, \alpha w_1 + \beta w_2) = \alpha Q(v, w_1) + \beta Q(v, w_2) \end{cases}$

to jest właśnie dwuliniowości, czyli liniowości ze względu na każdy ~~składnik~~ argument.

Odwzorowanie dwuliniowe są jednoznacznie zadane poprzez wartości na wektorach bazowych: Jeśli $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ jest bazą w V to liczby $Q_{ij} = Q(e_i, e_j)$ definiują Q na dowolnej parze wektorów.

Istotnie: $v = v^i e_i \quad w = w^j e_j$

$$Q(v, w) = Q\left(\sum_i v^i e_i, \sum_j w^j e_j\right) = \sum_i v^i Q\left(e_i, \sum_j w^j e_j\right) =$$

Macierz składająca się z liczb $Q_{ij} = Q(e_i, e_j)$ nazywa się macierzą formy Q w bazie e i oznaczana jest $[Q]_e$

2) Ograniczamy się do form dwuliniowych symetrycznych, to znaczy takich, że

$$\forall v, w \quad Q(v, w) = Q(w, v)$$

W szczególności oznacza to że

$$Q(e_i, e_j) = Q(e_j, e_i) \text{ czyli } Q_{ij} = Q_{ji}$$

i macierz $[Q]_e$ jest symetryczna ze względu na główną przekątną.

3) Funkcję kwadratową o której mowa tworzymy z formy dwuliniowej symetrycznej wstawiając ten sam wektor v w oba miejsca

$$v \longmapsto Q(v, v)$$

dla $n=2$ i formy $\begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{12} & Q_{22} \end{bmatrix}$ to samo

dostajemy

$$v \longmapsto (v^1)^2 Q_{11} + 2 v^1 v^2 Q_{12} + (v^2)^2 Q_{22}$$

zwróćmy uwagę na tę dwójkę
-> skąd ona się bierze???