Ćwiczenia z Analizy I R (październik 1)

Zadania przeznaczone na ćwiczenia oraz do rozwiązywania w domu. Warto przed ćwiczeniami przyjrzeć się im i sprawdzić, czy wszystkie słowa i oznaczenia w treści zadań są zrozumiałe. Teoretycznie znaczenie trudnych słów (injekcja, surjekcja, bijekcja...) powinno być objaśnione w trakcie wykładu.

Zadanie 1. Opisać i naszkicować na płaszczyźnie następujące zbiory:

(a) $\displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leqslant k(x-y)\};$

(b) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+2y^2-3nx+4ny\leqslant 0\};$

(c) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y\leqslant nx\};$

(d) $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ y^2\geqslant nx^2\};$

(e) $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2-3nx+4ny\leqslant 25\}$

Zadanie 2. Znaleźć zbiory:

(a) $\displaystyle\bigcup_{t\in[0,+\infty[}A_t,\qquad A_t=\{(x,y):\ x^2+y^2\leqslant 2t(2x-t)\};$

(b) $\displaystyle\bigcap_{t\in[-1,1]}B_t,\qquad \bigcup_{t\in[-1,1]}B_t,\qquad B_t=[t+1,t-1]\times[-2t-1,2t]$

Zadanie 3. Wykazać tożsamości

(a) $A\cup(B\setminus C)=[(A\cup B)\setminus C]\cup(A\cap C)$

(b) $A\setminus[B\setminus(C\setminus D)]=(A\setminus B)\cup[(A\cap C)\setminus D]$

(c) $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=(A_1\setminus A_2)\cup(A_2\setminus A_3)\cup\cdot\cup(A_{n-1}\setminus A_n)\cup A_n,\quad n\geqslant 2$

(d) $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=[A_1\setminus(A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_n)]\cup\cdots\cup[A_{n-1}\setminus A_n]\cup A_n$

(e) $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=(A_1\setminus A_2)\cup(A_2\setminus A_3)\cup\cdots\cup(A_{n-1}\setminus A_n)\cup(A_n\setminus A_1)\cup(A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n)$

Zadanie 4. Zbadać injektywność i surjektywność odwzorowania, opisać jego zbiór wartości i poziomice:

(a) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}^2,\ \ f(t)=\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\dfrac{2t}{1+t^2}\right),$

(b) $g:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\longrightarrow\mathbb{R},\ \ g(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2},$

(c) $h:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{Z},\ \ h(k)=2k^2-3k+1.$

Zadanie 5. Odwzorowanie $f:X\to X$ spełnia warunek

$$\forall x\in X\quad\exists n\in\mathbb{N}\quad f^n(x)=x.$$

Udowodnić, że odwzorowanie f jest bijekcją. Symbol f^n oznacza tu $n-$krotne złożenie odwzorowania f ze sobą, tzn $\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{\times n}$

Zadanie 6. Podać przykład bijekcji między zbiorami X i Y jeśli

$$X = [0,1[, \quad Y = [0,1]$$
$$X =]0,1[, \quad Y = [-2,2] \setminus \{-1,2\}$$
$$X = \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad Y = \mathbb{N}$$