Ćwiczenia z Analizy I R (październik 2)

Zadania przeznaczone na ćwiczenia oraz do rozwiązywania w domu. Warto przed ćwiczeniami przyjrzeć się im i sprawdzić, czy wszystkie słowa i oznaczenia w treści zadań są zrozumiałe. Teoretycznie, znaczenie trudnych słów powinno być objaśnione w trakcie wykładu.

Zadanie 1. Udowodnić metodą indukcji matematycznej:

(1) $$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

(2) $$\epsilon_1\sqrt{2+\epsilon_2\sqrt{2+\epsilon_3\sqrt{\cdots+\epsilon_n\sqrt{2}}}} = 2\sin\left[\frac{\pi}{4}\left(\epsilon_1 + \frac{\epsilon_1\epsilon_2}{2} + \cdots + \frac{\epsilon_1\epsilon_2\cdots\epsilon_n}{2^{n-1}}\right)\right], \text{ dla } \epsilon_i = \pm 1.$$

Zadanie 2. Na płaszyźnie leży n kół o jednakowych promieniach i rozłącznych wnętrzach. Wykazać, że mozna je pokolorować czterema barwami tak, żeby żadna para kół stycznych nie była pokolorowana jednakowo.

Zadanie 3. Udowodnić nierówność Bernoulliego

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \geqslant -1 \quad (1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

Zadanie 4. Dla $a_1, a_2, \ldots, a_n > 0$ definiujemy

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n},$$

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n},$$

$$H(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}.$$

Udowodnić nierówności

$$A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqslant G(a_1, a_2, \ldots, a_n) \geqslant H(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Zadanie 5. Funkcję $f : I \to \mathbb{R}$ nazywamy wypukłą na I, jeśli dla dowolnych $a, b \in I$ oraz $q \in [0,1]$ zachodzi $f(qa + (1-q)b) \leqslant qf(a) + (1-q)f(b)$. Udowodnić, że jeśli f jest wypukła, to dla $a_1, a_2, \ldots, a_n \in I$ oraz $q_1, q_2, \ldots, q_n \in [0,1]$ takich, że $q_1 + q_2 + \cdots + q_n = 1$ zachodzi nierówność (Jensena)

$$f(q_1a_1 + q_2a_2 + \cdots + q_na_n) \leqslant q_1f(a_1) + q_2f(a_2) + \cdots + q_nf(a_n).$$

Zadanie 6. Znaleźć najmniejszą relację równoważności w $\{a, b, c, d\}$ zawierającą (a, c) oraz (a, d).

Zadanie 7. W $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ wprowadzamy relację

$$(n, m) \sim (m', n') \quad \Longleftrightarrow \quad m + n' = m' + n.$$

Sprawdzić, że jest to relacja równoważności. W przestrzeni $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/_\sim$ klas abstrakcji wprowadzić działania dodawania i mnożenia tak, aby zbiór ten był izomorficzny z $\mathbb{Z}$.

Zadanie 8. Podobnie skonstruować można $\mathbb{Q}$, wprowadzając stosowną relację w $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$. Zdefiniować tę relację.

Zadanie 9. W zbiorze $\mathbb{Q}$ definiujemy relację

$$R = \{(x, y) : \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad 10^n(x - y) \in \mathbb{Z}\}.$$

Sprawdzić, że jest to relacja równoważności. Opisać klasy równoważności.