Ćwiczenia z Analizy I R (październik 3)

Zabieramy się za ciągi o wartościach w liczbach rzeczywistych. Przy rozwiązywaniu zadań przydadzą się następujace twierdzenia: o zbieżności ciągów monotonicznych i ograniczonych, o trzech ciągach, nierówności miedzy średnimi...

Zadanie 1. (Typowe przykłady, które trzeba umieć) Zbadać zbieżność i ewentualnie obliczyć granicę następujących ciągów:

(1) $x_n = \sqrt{2n^2+3n+1} - \sqrt{2n^2-3n+1}$

(2) $x_n = \sqrt[3]{n^3+2n^2+3} - \sqrt{n^2+2n+3}$

(3) $x_n = \sqrt[n]{a}, \quad a > 0$

(4) $x_n = nq^n, \quad |q| < 1$

(5) $x_n = \sqrt[n]{n}$

(6) $x_n = \sqrt[n]{n!}$

(7) $x_n = \dfrac{2n3^n}{n!}$

(8) $x_n = \dfrac{n^n}{n!}$

(9) $x_n = \dfrac{a^n}{n!}$

(10) $x_n = \dfrac{n^n}{(n!)^2}$

(11) $x_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

(12) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

(13) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{2}-1} + \dfrac{3}{\sqrt[n]{8}-1}$

(14) $\dfrac{n3^n+2n^2-1}{n!+1}$

(15) $x_n = \dfrac{a^n}{1+a^2n}, \ a \in \mathbb{R}$

(16) $\cos\left(\dfrac{n^2\pi}{n+2}\right)$

Ciekawe, na ile różnych sposobów potrafimy wykazać, że granica z punktu (5) jest tyle ile jest...

Zadanie 2. Wykazać, że ciąg
$$e_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$
jest zbieżny dla dowolnego rzeczywistego x. Dla $e(x) = \lim\limits_{n\to\infty} e_n(x)$ wykazać następujące własności:
(1) $e(x)e(y) = e(x+y)$,
(2) dla dowolnego x $e(x) \geqslant 0$, $e(x) \geqslant 1+x$,
(3) dla $x < 1$, $e(x) \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.
(4) Zauważyć, że dla funkcji odwrotnej log prawdziwe są oszacowania $\dfrac{x-1}{x} \leqslant \log(x) \leqslant x-1$.

Zadanie 3. Wykazać, że jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ oraz $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = g$ to granica ciągu

$$(1+a_n)^{b_n}$$

istnieje i jest równa e^g. Wykorzystać to do zbadania granicy ciągów:

$$x_n \left(\frac{3n+7}{3n+5}\right)^{2n+3}, \qquad y_n = \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right)^{n^2}.$$

Zadanie 4. Zbadać zbieżność ciągów zadanych w sposób rekurencyjny, w zależności od x_0.

$$(a)\ \ x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}, \qquad (b)\ \ x_{n+1} = \frac{2}{x_n+1},\ x_0 > 1$$

Zadanie 5. Udowodnić (na przykład korzystając z elementarnej geometrii na płaszczyźnie), że jeśli $x_n \neq 0$ i ciąg x_n jest zbieżny do zera to

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1.$$

Wolno wykorzystać ciągłość funkcji *sinus*.

Zadanie 6. Wiedząc, że $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$ udowodnić, że $\lim_{n\to\infty}(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}) = e$