Ćwiczenia z Analizy I R (październik 4)

*Remanenty ciągowe i coś z topologii metrycznej.*

**Zadanie 1.** Wykazać, że
$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1) = \log a, \qquad \lim_{n\to\infty}[n(\sqrt[n]{a}-1)-\log n] = 0$$
i użyć tego do obliczenia granic
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{5}-1}{\sqrt[n]{3}-1}, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}}{3}\right)^n, \qquad \lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{\log n}{n}\right)^n.$$

**Zadanie 2.** Wykazać, że jeśli ciąg liczbowy $(x_n)$ jest ograniczony oraz spełnia warunek
$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n) = 0,$$
to zbiór punktów skupienia tego ciągu jest odcinkiem domkniętym $[a,b]$ i $a = \liminf x_n$, $b = \limsup x_n$.

**Zadanie 3.** Odcinkiem metrycznym $[a,b]$ nazywać będziemy następujący podzbiór przestrzeni metrycznej $(X,d)$:
$$[a,b] = \{x \in X|\ d(a,x)+d(x,b) = d(a,b)\}.$$
Wykazać, że odcinek metryczny jest domknięty. Jak wyglądają odcinki metryczne w $\mathbb{R}^2$ względem metryk $d_1$, $d_2$, $d_\infty$?

**Zadanie 4.** Wykazać, że zbiór punktów skupienia ciągu w przestrzeni metrycznej jest domknięty.

**Zadanie 5.** niech $(X,d)$ będzie przestrzenią metryczną. Wykazać, że jeśli $\mathcal{O}\subset X$ jest zbiorem otwartym to dla dowolnego $A\subset X$ zachodzi (a) $\mathcal{O}\cap\overline{A}\subset\overline{\mathcal{O}\cap A}$, (b) $\overline{\mathcal{O}\cap\overline{A}} = \overline{\mathcal{O}\cap A}$. Wykazać także, że jeśli dla każdego $A$ zachodzi $\mathcal{U}\cap\overline{A}\subset\overline{\mathcal{U}\cap A}$, to $\mathcal{U}$ jest otwarty.

**Zadanie 6.** Niech $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ będą zbiorami otwartymi w $\mathbb{R}$ w zwykłej topologii. Czy prawdziwa jest implikacja
$$\mathcal{U}\subset\overline{\mathcal{V}} \Longrightarrow \mathcal{U}\subset\mathcal{V}?$$
Jeśli tak - udowodnić, jeśli nie - podać kontrprzykład.