Liczby zespolone

Katarzyna Grabowska

Uniwersytet Warszawski, Wydział Fizyki, Katedra Metod Matematycznych Fizyki

Letnia Szkoła Fizyki, Płock 2008

Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi

Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi

780r Khiva (Uzbekistan)– ok 850 Bagdad

Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi

780r Khiva (Uzbekistan)– ok 850 Bagdad

Kitab **al-Jabr** wa-l-Muqabala

"The Compendious Book on Calculation by Completion and Balancing"

Równania kwadratowe - metoda arabska.

Równania kwadratowe - metoda arabska.

Matematycy arabscy nie używali liczb ujemnych i zera, dlatego wyróżniali kilka typów równań kwadratowych:

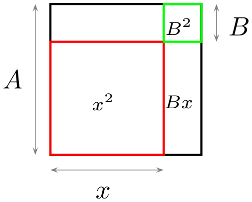
$$x^2 + bx = c \qquad x^2 + c = bx \qquad x^2 = bx + c \qquad x^2 = bx \qquad x^2 = c$$

Równania kwadratowe - metoda arabska.

Matematycy arabscy nie używali liczb ujemnych i zera, dlatego wyróżniali kilka typów równań kwadratowych:

$$x^2 + bx = c \qquad x^2 + c = bx \qquad x^2 = bx + c \qquad x^2 = bx \qquad x^2 = c$$

zajmijmy się rozwiązywaniem równań pierwszego typu:



korzystamy z obrazka

$$x = A - B,$$
$$A^2 = x^2 + B^2 + 2Bx$$
$$A^2 - B^2 = x^2 + 2Bx$$

porównujemy z równaniem

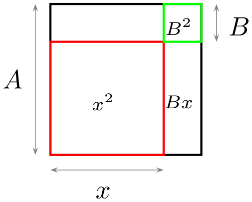
$$b = 2B \qquad c = A^2 - B^2 \quad \Longrightarrow \quad B = \frac{b}{2}, A = \sqrt{c + \frac{b^2}{4}}$$

Równania kwadratowe - metoda arabska.

Matematycy arabscy nie używali liczb ujemnych i zera, dlatego wyróżniali kilka typów równań kwadratowych:

$$x^2 + bx = c \qquad x^2 + c = bx \qquad x^2 = bx + c \qquad x^2 = bx \qquad x^2 = c$$

zajmijmy się rozwiązywaniem równań pierwszego typu:



korzystamy z obrazka

$$\begin{aligned} x &= A - B, \\ A^2 &= x^2 + B^2 + 2Bx \\ A^2 - B^2 &= x^2 + 2Bx \end{aligned}$$

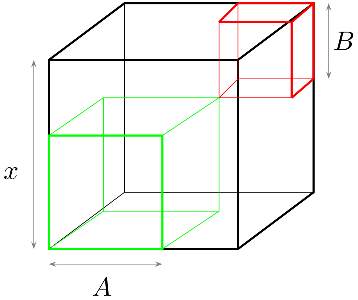
porównujemy z równaniem

$$b = 2B \qquad c = A^2 - B^2 \qquad \Longrightarrow \qquad B = \frac{b}{2}, A = \sqrt{c + \frac{b^2}{4}}$$

$$x = A - B = \sqrt{c + \frac{b^2}{4}} - \frac{b}{2}$$

Równania trzeciego stopnia - metoda arabska

Rozwiązujemy równanie: $x^3 = px + q$

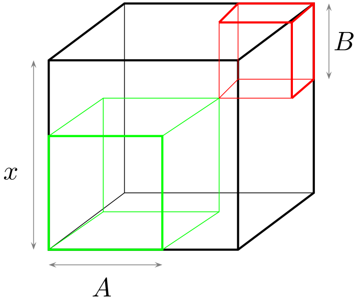


$$x = A + B$$
$$x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx$$
$$x^3 = px + q$$

$$p = 3AB, \quad q = A^3 + B^3$$
$$p^3 = 27A^3B^3$$

Równania trzeciego stopnia - metoda arabska

Rozwiązujemy równanie: $x^3 = px + q$



$$x = A + B$$
$$x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx$$
$$x^3 = px + q$$

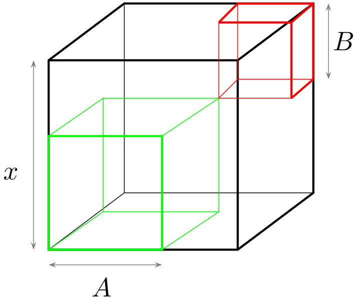
$$p = 3AB, \quad q = A^3 + B^3$$
$$p^3 = 27A^3B^3$$

Otrzymujemy równanie kwadratowe na A^3:

$$p^3 = 27(A^3)q - 27(A^3)^2$$

Równania trzeciego stopnia - metoda arabska

Rozwiązujemy równanie: $x^3 = px + q$



$$x = A + B$$
$$x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx$$
$$x^3 = px + q$$

$$p = 3AB, \quad q = A^3 + B^3$$
$$p^3 = 27A^3B^3$$

Otrzymujemy równanie kwadratowe na A^3:

$$p^3 = 27(A^3)q - 27(A^3)^2$$

Rozwiązujemy to równanie i mamy wynik....

Równania trzeciego stopnia - metoda arabska

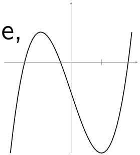
Jednak są równania trzeciego stopnia, na przykład

$$x^3 = 3x + 1,$$

Równania trzeciego stopnia - metoda arabska

Jednak są równania trzeciego stopnia, na przykład

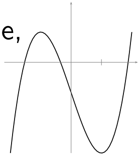
$$x^3 = 3x + 1,$$

które mają rozwiązania rzeczywiste dodatnie, 

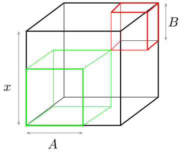
Równania trzeciego stopnia - metoda arabska

Jednak są równania trzeciego stopnia, na przykład

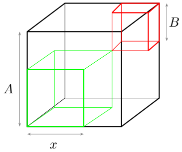
$$x^3 = 3x + 1,$$

które mają rozwiązania rzeczywiste dodatnie, 

pasują do jednego z możliwych obrazków, ale sprawiają trudności:



$$x^3 = px + q$$



$$x^3 + px = q$$

Równania trzeciego stopnia - metoda arabska

Spróbujmy rozwiązywać równanie $x^3 = 3x + 1$ metodą arabską:

Równania trzeciego stopnia - metoda arabska

Spróbujmy rozwiązywać równanie $x^3 = 3x + 1$ metodą arabską:
Podstawiamy

$$x = A + B, \quad x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx$$

Równania trzeciego stopnia - metoda arabska

Spróbujmy rozwiązywać równanie $x^3 = 3x + 1$ metodą arabską:
Podstawiamy

$$x = A + B, \quad x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx$$

z porównania z wyjściowym równaniem mamy:

$$3AB = 3 \quad A^3 + B^3 = 1$$

$$A^3B^3 = 1 \qquad A^3 + B^3 = 1$$

Równania trzeciego stopnia - metoda arabska

Spróbujmy rozwiązywać równanie $x^3 = 3x + 1$ metodą arabską:
Podstawiamy

$$x = A + B, \quad x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx$$

z porównania z wyjściowym równaniem mamy:

$$3AB = 3 \quad A^3 + B^3 = 1$$

$$A^3 B^3 = 1 \qquad A^3 + B^3 = 1$$

Równanie kwadratowe na A^3 , które z tego otrzymujemy

$$\left(A^3\right)^2 - A^3 + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

nie ma rozwiązań rzeczywistych!

Równania trzeciego stopnia - metoda arabska

Spróbujmy rozwiązywać równanie $x^3 = 3x + 1$ metodą arabską:
Podstawiamy

$$x = A + B, \quad x^3 = A^3 + B^3 + 3ABx$$

z porównania z wyjściowym równaniem mamy:

$$3AB = 3 \quad A^3 + B^3 = 1$$

$$A^3 B^3 = 1 \qquad A^3 + B^3 = 1$$

Równanie kwadratowe na A^3 , które z tego otrzymujemy

$$\left(A^3\right)^2 - A^3 + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$$

nie ma rozwiązań rzeczywistych! A samo równanie ma trzy rozwiązania rzeczywiste w tym jedno dodatnie!

CO ROBIĆ

Definicja

Przydałoby się rozszerzyć zbiór liczb rzeczywistych o dodatkowe elementy, wśród nich także $\imath$ taki, że

$$\imath^2 = -1,$$

w taki sposób, aby można się było nimi posługiwać jak normalnymi liczbami.

Definicja

Przydałoby się rozszerzyć zbiór liczb rzeczywistych o dodatkowe elementy, wśród nich także $\imath$ taki, że

$$\imath^2 = -1,$$

w taki sposób, aby można się było nimi posługiwać jak normalnymi liczbami.

- co to znaczy posługiwać się jak normalnymi liczbami?
- co to znaczy rozszerzyć?

co to znaczy posługiwać się jak normalnymi liczbami?

Własności dodawania i mnożenia liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ lub rzeczywistych $\mathbb{R}$

co to znaczy posługiwać się jak normalnymi liczbami?

Własności dodawania i mnożenia liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ lub rzeczywistych $\mathbb{R}$

- łączność: $(a+b)+c=a+(b+c)$, $(ab)c=a(bc)$

co to znaczy posługiwać się jak normalnymi liczbami?

Własności dodawania i mnożenia liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ lub rzeczywistych $\mathbb{R}$

- łączność: $(a+b)+c=a+(b+c)$, $(ab)c=a(bc)$
- przemienność: $a+b=b+a$, $ab=ba$

co to znaczy posługiwać się jak normalnymi liczbami?

Własności dodawania i mnożenia liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ lub rzeczywistych $\mathbb{R}$

- łączność: $(a+b)+c = a+(b+c)$, $(ab)c = a(bc)$
- przemienność: $a+b = b+a$, $ab = ba$
- istnienie elementu neutralnego: $a+0 = a$, $a1 = a$

co to znaczy posługiwać się jak normalnymi liczbami?

Własności dodawania i mnożenia liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ lub rzeczywistych $\mathbb{R}$

- łączność: $(a+b)+c = a+(b+c)$, $(ab)c = a(bc)$
- przemienność: $a+b = b+a$, $ab = ba$
- istnienie elementu neutralnego: $a+0 = a$, $a1 = a$
- istnienie elementu przeciwnego (odwrotnego): $a+(-a) = 0$, $aa^{-1} = 1$ dla $a \neq 0$

co to znaczy posługiwać się jak normalnymi liczbami?

Własności dodawania i mnożenia liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ lub rzeczywistych $\mathbb{R}$

- łączność: $(a+b)+c=a+(b+c)$, $(ab)c=a(bc)$
- przemienność: $a+b=b+a$, $ab=ba$
- istnienie elementu neutralnego: $a+0=a$, $a1=a$
- istnienie elementu przeciwnego (odwrotnego): $a+(-a)=0$, $aa^{-1}=1$ dla $a\neq 0$
- rozdzielność: $(a+b)c=ac+bc$

co to znaczy posługiwać się jak normalnymi liczbami?

Własności dodawania i mnożenia liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ lub rzeczywistych $\mathbb{R}$

- łączność: $(a+b)+c = a+(b+c)$, $(ab)c = a(bc)$
- przemienność: $a+b = b+a$, $ab = ba$
- istnienie elementu neutralnego: $a+0 = a$, $a1 = a$
- istnienie elementu przeciwnego (odwrotnego): $a+(-a) = 0$, $aa^{-1} = 1$ dla $a \neq 0$
- rozdzielność: $(a+b)c = ac+bc$
- nietrywialność: $1 \neq 0$

co to znaczy posługiwać się jak normalnymi liczbami?

Własności dodawania i mnożenia liczb wymiernych $\mathbb{Q}$ lub rzeczywistych $\mathbb{R}$

- łączność: $(a+b)+c=a+(b+c)$, $(ab)c=a(bc)$
- przemienność: $a+b=b+a$, $ab=ba$
- istnienie elementu neutralnego: $a+0=a$, $a1=a$
- istnienie elementu przeciwnego (odwrotnego): $a+(-a)=0$, $aa^{-1}=1$ dla $a\neq 0$
- rozdzielność: $(a+b)c=ac+bc$
- nietrywialność: $1\neq 0$

Definicja

Zbiór $\mathbb{K}$ z dwoma działaniami spełniającymi powyższe warunki nazywa się **ciałem**.

co to znaczy rozszerzyć?

$\mathbb{Q}$ jest podzbiorem $\mathbb{R}$, działania są takie same.

co to znaczy rozszerzyć?

$\mathbb{Q}$ jest podzbiorem $\mathbb{R}$, działania są takie same. Szukamy więc zbioru zawierającego $\mathbb{R}$ oraz element $\imath$, którego kwadrat jest -1 ze zwykłymi działaniami o zwykłych własnościach.

co to znaczy rozszerzyć?

$\mathbb{Q}$ jest podzbiorem $\mathbb{R}$, działania są takie same. Szukamy więc zbioru zawierającego $\mathbb{R}$ oraz element $\imath$, którego kwadrat jest -1 ze zwykłymi działaniami o zwykłych własnościach.

Definicja

Ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$ *nazywamy takie ciało, które*

co to znaczy rozszerzyć?

$\mathbb{Q}$ jest podzbiorem $\mathbb{R}$, działania są takie same. Szukamy więc zbioru zawierającego $\mathbb{R}$ oraz element $\imath$, którego kwadrat jest -1 ze zwykłymi działaniami o zwykłych własnościach.

Definicja

Ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$ nazywamy takie ciało, które

- *zawiera ciało liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$,*

co to znaczy rozszerzyć?

$\mathbb{Q}$ jest podzbiorem $\mathbb{R}$, działania są takie same. Szukamy więc zbioru zawierającego $\mathbb{R}$ oraz element $\imath$, którego kwadrat jest -1 ze zwykłymi działaniami o zwykłych własnościach.

Definicja

Ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$ nazywamy takie ciało, które

- *zawiera ciało liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$,*
- *zawiera element $\imath$ taki, że $\imath^2 = -1$,*

co to znaczy rozszerzyć?

$\mathbb{Q}$ jest podzbiorem $\mathbb{R}$, działania są takie same. Szukamy więc zbioru zawierającego $\mathbb{R}$ oraz element $\imath$, którego kwadrat jest -1 ze zwykłymi działaniami o zwykłych własnościach.

Definicja

Ciałem liczb zespolonych $\mathbb{C}$ nazywamy takie ciało, które

- *zawiera ciało liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$,*
- *zawiera element $\imath$ taki, że $\imath^2 = -1$,*
- *jest najmniejszym ciałem spełniającym poprzednie warunki.*

Konstrukcja ciała liczb zespolonych

Weźmy ciało $\mathbb{K}$ spełniające dwa pierwsze warunki i rozważmy jego podzbiór:

$$\{a + \imath b : \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

Konstrukcja ciała liczb zespolonych

Weźmy ciało $\mathbb{K}$ spełniające dwa pierwsze warunki i rozważmy jego podzbiór:

$$\{a + \imath b : \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

Sprawdzamy warunki bycia ciałem:

- dodawanie: $(a + \imath b) + (c + \imath d) = (a + c) + \imath(b + d)$

Konstrukcja ciała liczb zespolonych

Weźmy ciało $\mathbb{K}$ spełniające dwa pierwsze warunki i rozważmy jego podzbiór:

$$\{a + \imath b : \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

Sprawdzamy warunki bycia ciałem:

- dodawanie: $(a + \imath b) + (c + \imath d) = (a + c) + \imath(b + d)$
- mnożenie: $(a + \imath b) \cdot (c + \imath d) = ac - bd + \imath(ad + bc)$

Konstrukcja ciała liczb zespolonych

Weźmy ciało $\mathbb{K}$ spełniające dwa pierwsze warunki i rozważmy jego podzbiór:

$$\{a + \imath b : \; a, b \in \mathbb{R}\}$$

Sprawdzamy warunki bycia ciałem:

- dodawanie: $(a + \imath b) + (c + \imath d) = (a + c) + \imath(b + d)$
- mnożenie: $(a + \imath b) \cdot (c + \imath d) = ac - bd + \imath(ad + bc)$
- łączność, przemienność: oczywiste (lub łatwo sprawdzalne)

Konstrukcja ciała liczb zespolonych

Weźmy ciało $\mathbb{K}$ spełniające dwa pierwsze warunki i rozważmy jego podzbiór:

$$\{a + \imath b : \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

Sprawdzamy warunki bycia ciałem:

- dodawanie: $(a + \imath b) + (c + \imath d) = (a + c) + \imath(b + d)$
- mnożenie: $(a + \imath b) \cdot (c + \imath d) = ac - bd + \imath(ad + bc)$
- łączność, przemienność: oczywiste (lub łatwo sprawdzalne)
- istnienie elementu neutralnego 0, 1

Konstrukcja ciała liczb zespolonych

Weźmy ciało $\mathbb{K}$ spełniające dwa pierwsze warunki i rozważmy jego podzbiór:

$$\{a + \imath b : \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

Sprawdzamy warunki bycia ciałem:

- dodawanie: $(a + \imath b) + (c + \imath d) = (a + c) + \imath(b + d)$
- mnożenie: $(a + \imath b) \cdot (c + \imath d) = ac - bd + \imath(ad + bc)$
- łączność, przemienność: oczywiste (lub łatwo sprawdzalne)
- istnienie elementu neutralnego 0, 1
- istnienie elementu przeciwnego (odwrotnego) $-(a + \imath b) = (-a) + \imath(-b)$,

Konstrukcja ciała liczb zespolonych

Weźmy ciało $\mathbb{K}$ spełniające dwa pierwsze warunki i rozważmy jego podzbiór:

$$\{a + \imath b : \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

Sprawdzamy warunki bycia ciałem:

- dodawanie: $(a + \imath b) + (c + \imath d) = (a + c) + \imath(b + d)$
- mnożenie: $(a + \imath b) \cdot (c + \imath d) = ac - bd + \imath(ad + bc)$
- łączność, przemienność: oczywiste (lub łatwo sprawdzalne)
- istnienie elementu neutralnego 0, 1
- istnienie elementu przeciwnego (odwrotnego) $-(a + \imath b) = (-a) + \imath(-b), \quad (a + \imath b)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \imath\frac{-b}{a^2+b^2}$

Konstrukcja ciała liczb zespolonych

Weźmy ciało $\mathbb{K}$ spełniające dwa pierwsze warunki i rozważmy jego podzbiór:

$$\{a + \imath b : \; a, b \in \mathbb{R}\}$$

Sprawdzamy warunki bycia ciałem:

- dodawanie: $(a + \imath b) + (c + \imath d) = (a + c) + \imath(b + d)$
- mnożenie: $(a + \imath b) \cdot (c + \imath d) = ac - bd + \imath(ad + bc)$
- łączność, przemienność: oczywiste (lub łatwo sprawdzalne)
- istnienie elementu neutralnego 0, 1
- istnienie elementu przeciwnego (odwrotnego) $-(a + \imath b) = (-a) + \imath(-b), \quad (a + \imath b)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \imath \frac{-b}{a^2+b^2}$
- rozdzielność: łatwo sprawdzalna

Konstrukcja ciała liczb zespolonych

Weźmy ciało $\mathbb{K}$ spełniające dwa pierwsze warunki i rozważmy jego podzbiór:

$$\{a + \imath b : \; a, b \in \mathbb{R}\}$$

Sprawdzamy warunki bycia ciałem:

- dodawanie: $(a + \imath b) + (c + \imath d) = (a + c) + \imath(b + d)$
- mnożenie: $(a + \imath b) \cdot (c + \imath d) = ac - bd + \imath(ad + bc)$
- łączność, przemienność: oczywiste (lub łatwo sprawdzalne)
- istnienie elementu neutralnego 0, 1
- istnienie elementu przeciwnego (odwrotnego) $-(a + \imath b) = (-a) + \imath(-b), \quad (a + \imath b)^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + \imath\frac{-b}{a^2+b^2}$
- rozdzielność: łatwo sprawdzalna
- nietrywialność $1 \neq 0$ oczywista

Konstrukcja ciała liczb zespolonych

Wniosek: $\{a + \imath b : \; a, b \in \mathbb{R}\}$ jest podciałem $\mathbb{K}$

Konstrukcja ciała liczb zespolonych

Wniosek: $\{a + \imath b : \; a, b \in \mathbb{R}\}$ jest podciałem $\mathbb{K}$

Tak naprawdę: $\{a + \imath b : \; a, b \in \mathbb{R}\}$ jest $\mathbb{C}$

Konstrukcja ciała liczb zespolonych

Wniosek: $\{a + \imath b : \; a, b \in \mathbb{R}\}$ jest podciałem $\mathbb{K}$

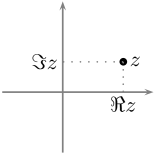
Tak naprawdę: $\{a + \imath b : \; a, b \in \mathbb{R}\}$ jest $\mathbb{C}$

Czy rzeczywiście zbiór $\{a + \imath b : \; a, b \in \mathbb{R}\}$ jest najmniejszym spełniającym dwa pierwsze warunki definicji? To trzeba udowodnić!

Oznaczenia i nazwy

$$z \in \mathbb{C} \quad \Longrightarrow \quad z = x + \imath y$$

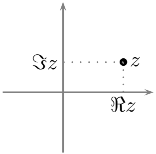
$x = \Re z$ część rzeczywista $\qquad$ $y = \Im z$ część urojona



Oznaczenia i nazwy

$$z \in \mathbb{C} \quad \Longrightarrow \quad z = x + \imath y$$

$x = \Re z$ część rzeczywista $\qquad y = \Im z$ część urojona



Ćwiczenie

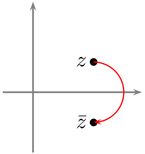
Obliczyć część rzeczywistą i urojoną liczby zespolonej:

$$z = (1 + \imath)^3 (1 - \imath)^2$$

Sprzężenie zespolone

$$z \in \mathbb{C},\ z = x + \imath y \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{z} = x - \imath y$$

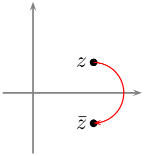
Liczba $\bar{z}$ nazywa się liczbą *sprzężoną* do z.



Sprzężenie zespolone

$$z \in \mathbb{C},\ z = x + \imath y \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{z} = x - \imath y$$

Liczba $\bar{z}$ nazywa się liczbą *sprzężoną* do z.



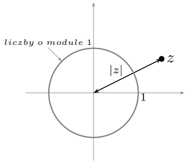
Fakt

Własności sprzężenia:

- $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$
- $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$
- $\bar{\bar{z}} = z$
- $\bar{z} = z \ \Rightarrow\ z \in \mathbb{R}$

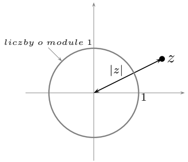
Moduł liczby zespolonej

$$z = x + \imath y \qquad \Longrightarrow \qquad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Moduł liczby zespolonej

$$z = x + \imath y \qquad \Longrightarrow \qquad |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$



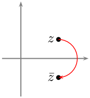
Fakt

Własności modułu

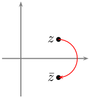
- $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$
- $|z = 0| \Rightarrow z = 0$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$
- $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$, $||z_1| - |z_1|| \leqslant |z_1 - z_2|$.

Interpretacja geometryczna

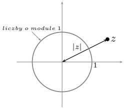
- Sprzężenie: symetria względem osi $0x$



Interpretacja geometryczna



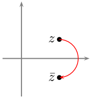
- Sprzężenie: symetria względem osi $0x$

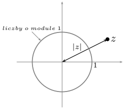


- Moduł: odległość od $(0, 0)$

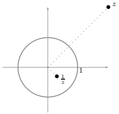
Interpretacja geometryczna

- Sprzężenie: symetria względem osi $0x$



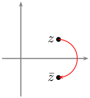


- Moduł: odległość od $(0,0)$

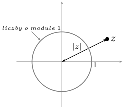


- Odwrotność: inwersja względem okręgu $|z| = 1$ i symetria

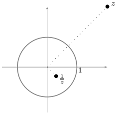
Interpretacja geometryczna



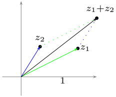
- Sprzężenie: symetria względem osi $0x$



- Moduł: odległość od $(0,0)$



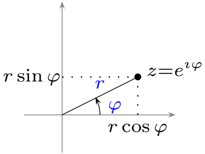
- Odwrotność: inwersja względem okręgu $|z|=1$ i symetria



- Dodawanie: jak wektory na płaszczyźnie

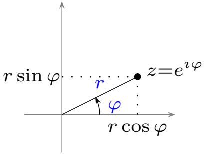
Symbol Eulera

W $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ wprowadzamy współrzędne biegunowe:



Symbol Eulera

W $\mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$ wprowadzamy współrzędne biegunowe:



$$z = x + \imath y$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi : \quad x = r\cos\varphi, \; y = r\sin\varphi$$

$$z = r(\cos\varphi + \imath\sin\varphi) = re^{\imath\varphi}$$

Symbol Eulera

$$e^{\imath\varphi} = \cos\varphi + \imath\sin\varphi$$

Symbol Eulera

$$e^{\imath\varphi} = \cos\varphi + \imath\sin\varphi$$

Fakt

Własności symbolu Eulera:

$$|e^{\imath\varphi}| = 1 \qquad |\cos\varphi + \imath\sin\varphi| = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

$$e^{\imath\varphi}\cdot e^{\imath\psi} = e^{\imath(\varphi+\psi)} \qquad (\cos\varphi + \imath\sin\varphi)(\cos\psi + \imath\sin\psi) = \\ = \cos(\varphi+\psi) + \imath\sin(\varphi+\psi)$$

$$\overline{e^{\imath\varphi}} = \frac{1}{e^{\imath\varphi}} \qquad \sin(-\varphi) = -\sin\varphi$$

$$e^{\imath\varphi} = e^{\imath\psi} \qquad \ldots$$

$$\Rightarrow\ \varphi - \psi = 2k\pi$$

Symbol Eulera

Pożyteczne wzory:

$$\sin\varphi = \frac{e^{\imath\varphi} - e^{-\imath\varphi}}{2\imath} \qquad \cos\varphi = \frac{e^{\imath\varphi} + e^{-\imath\varphi}}{2}$$

Symbol Eulera

Pożyteczne wzory:

$$\sin\varphi = \frac{e^{\imath\varphi} - e^{-\imath\varphi}}{2\imath} \qquad \cos\varphi = \frac{e^{\imath\varphi} + e^{-\imath\varphi}}{2}$$

Ćwiczenie

Korzystając z postaci trygonometrycznej liczby zespolonej i własności symbolu Eulera wyprowadzić wzór na

$$\sin\varphi + \sin\psi = \cdots$$

Symbol Eulera

Co to ma wspólnego z funkcją wykładniczą?

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Symbol Eulera

Co to ma wspólnego z funkcją wykładniczą?

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{\imath\varphi} = 1 + \imath\varphi + \frac{1}{2!}(\imath\varphi)^2 + \frac{1}{3!}(\imath\varphi)^3 + \cdots =$$

Symbol Eulera

Co to ma wspólnego z funkcją wykładniczą?

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{\imath\varphi} = 1 + \imath\varphi + \frac{1}{2!}(\imath\varphi)^2 + \frac{1}{3!}(\imath\varphi)^3 + \cdots =$$

$$= 1 + \imath\varphi - \frac{1}{2}(\varphi)^2 - \frac{1}{6}\imath(\varphi)^3 + \cdots$$

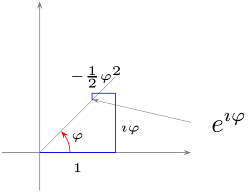
Symbol Eulera

Co to ma wspólnego z funkcją wykładniczą?

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{\imath\varphi} = 1 + \imath\varphi + \frac{1}{2!}(\imath\varphi)^2 + \frac{1}{3!}(\imath\varphi)^3 + \cdots =$$

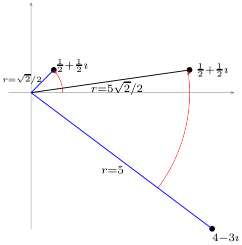
$$= 1 + \imath\varphi - \frac{1}{2}(\varphi)^2 - \frac{1}{6}\imath(\varphi)^3 + \cdots$$



Interpretacja geometryczna mnożenia

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\imath=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\imath\pi/4} \qquad 4-3i=5e^{\imath\varphi}$$

$$(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\imath)(4-3i)=\frac{7}{2}+\frac{1}{2}\imath=5\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\imath(\varphi+\pi/4)}$$



Mnożenie to jednokładność i obrót:

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Pierwiastkowanie to inaczej rozwiązywanie równań postaci

$$z^n = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Pierwiastkowanie to inaczej rozwiązywanie równań postaci

$$z^n = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

Umiemy rozwiązywać takie równania w dziedzinie rzeczywistej $\mathbb{R}$. W dziedzinie zespolonej $\mathbb{C}$ możemy do problemu podejść geometrycznie.

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Pierwiastkowanie to inaczej rozwiązywanie równań postaci

$$z^n = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

Umiemy rozwiązywać takie równania w dziedzinie rzeczywistej $\mathbb{R}$. W dziedzinie zespolonej $\mathbb{C}$ możemy do problemu podejść geometrycznie.

$$z^n = z \cdot z \cdot \ \cdots \ \cdot z$$

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Pierwiastkowanie to inaczej rozwiązywanie równań postaci

$$z^n = \alpha, \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

Umiemy rozwiązywać takie równania w dziedzinie rzeczywistej $\mathbb{R}$. W dziedzinie zespolonej $\mathbb{C}$ możemy do problemu podejść geometrycznie.

$$z^n = z \cdot z \cdot \; \cdots \; \cdot z$$

Mnożenie polega na mnożeniu modułów i dodawaniu argumentów. Dla ułatwienia weźmy na warsztat liczbę o module 1, np $\imath$ i policzmy pierwiastek (-tki) 3-go stopnia:

$$z^3 = \imath$$

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

$$z^3 = \imath$$

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

$$z^3 = \imath$$

Załóżmy, że

$$z = re^{i\varphi}$$

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

$$z^3 = \imath$$

Załóżmy, że

$$z = re^{i\varphi}$$

wtedy

$$z^3 = re^{\imath\varphi} \cdot re^{\imath\varphi} \cdot re^{\imath\varphi} = r^3 e^{3i\varphi} = \imath \ \left(= e^{\imath \frac{\pi}{2}}\right).$$

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

$$z^3 = \imath$$

Załóżmy, że

$$z = re^{i\varphi}$$

wtedy

$$z^3 = re^{\imath\varphi} \cdot re^{\imath\varphi} \cdot re^{\imath\varphi} = r^3 e^{3i\varphi} = \imath \;\; (= e^{\imath\frac{\pi}{2}}).$$

To znaczy, że r i φ spełniają równania (w dziedzinie rzeczywistej)

$$r^3 = 1, \qquad 3\varphi = \frac{\pi}{2}(\mod 2\pi).$$

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

$$z^3 = \imath$$

Załóżmy, że

$$z = re^{i\varphi}$$

wtedy

$$z^3 = re^{\imath\varphi} \cdot re^{\imath\varphi} \cdot re^{\imath\varphi} = r^3 e^{3i\varphi} = \imath \ \ (= e^{\imath\frac{\pi}{2}}).$$

To znaczy, że r i φ spełniają równania (w dziedzinie rzeczywistej)

$$r^3 = 1, \qquad 3\varphi = \frac{\pi}{2}(\bmod 2\pi).$$

Jedynym rozwiązaniem dla r jest

$$r = 1$$

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

$$z^3 = \imath$$

Załóżmy, że

$$z = re^{i\varphi}$$

wtedy

$$z^3 = re^{\imath\varphi} \cdot re^{\imath\varphi} \cdot re^{\imath\varphi} = r^3 e^{3i\varphi} = \imath \;\; (= e^{\imath\frac{\pi}{2}}).$$

To znaczy, że r i φ spełniają równania (w dziedzinie rzeczywistej)

$$r^3 = 1, \qquad 3\varphi = \frac{\pi}{2}(\mod 2\pi).$$

Jedynym rozwiązaniem dla r jest

$$r = 1$$

a dla φ mamy trzy rozwiązania. Biorąc $3\varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ mamy

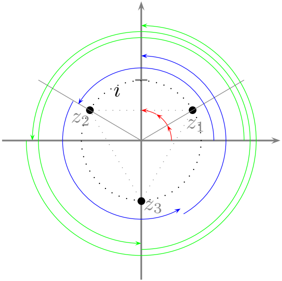
$$\varphi = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \qquad \begin{cases} \varphi_1 = \pi/6 & k = 0 \\ \varphi_2 = 5\pi/6 & k = 1 \\ \varphi_3 = 3\pi/2 & k = 2 \end{cases}$$

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

$$\begin{cases} \varphi_1 = \pi/6 & k = 0 \quad z_1 = e^{\imath\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\imath \\ \varphi_2 = 5\pi/6 & k = 1 \quad z_2 = e^{\imath 5\pi/6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\imath \\ \varphi_3 = 3\pi/2 & k = 2 \quad z_3 = e^{\imath 3\pi/2} = -\imath \end{cases}$$

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

$$\begin{cases} \varphi_1 = \pi/6 & k = 0 & z_1 = e^{\imath\pi/6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\imath \\ \varphi_2 = 5\pi/6 & k = 1 & z_2 = e^{\imath 5\pi/6} = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\imath \\ \varphi_3 = 3\pi/2 & k = 2 & z_3 = e^{\imath 3\pi/2} = -\imath \end{cases}$$



Pierwiastkowanie liczb zespolonych

A co będzie jeśli liczba pierwiastkowana ma moduł różny od 1?

$$z^3 = 8i$$

$$z = re^{\imath\varphi}, \quad z^3 = r^3 e^{\imath\varphi} \quad \Rightarrow \quad r^3 = 0, \;\; 3\varphi = \frac{\pi}{2} \; (mod 2\pi)$$

Rozwiązania równania na φ już znamy, a rozwiązaniem równania na r jest pierwiastek arytmetyczny:

$$r = \sqrt[3]{8} = 2.$$

Zatem

$$\sqrt[3]{8\imath} = \left\{2e^{\imath\pi/6}, \; 2e^{\imath 5\pi/6}, \; 2e^{\imath 3\pi/2}\right\}$$

W innej notacji

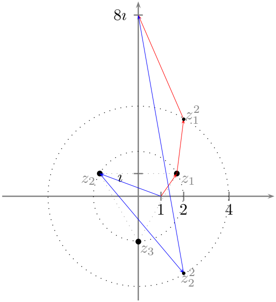
$$\sqrt[3]{8\imath} = \left\{\sqrt{3} + \imath, \; -\sqrt{3} + \imath, \; -2\imath\right\}$$

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

$$z^3 = 8\imath, \qquad \sqrt[3]{8\imath} = \left\{\sqrt{3}+\imath,\ -\sqrt{3}+\imath,\ -2\imath\right\}$$

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

$$z^3 = 8\imath, \qquad \sqrt[3]{8\imath} = \left\{ \sqrt{3} + \imath,\ -\sqrt{3} + \imath,\ -2\imath \right\}$$



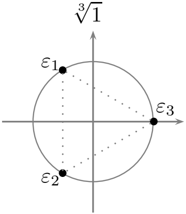
$$z = re^{\imath\varphi} \qquad \sqrt[n]{z} = \left\{ \sqrt[n]{r}\, e^{\imath \frac{\varphi + 2k\pi}{n}},\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1 \right\}$$

Pierwiastki n-tego stopnia z 1

Geometrycznie pierwiastki n-tego stopnia z 1 są wierzchołkami n-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1:

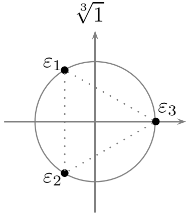
Pierwiastki *n*-tego stopnia z 1

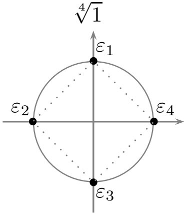
Geometrycznie pierwiastki *n*-tego stopnia z 1 są wierzchołkami *n*-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1:



Pierwiastki *n*-tego stopnia z 1

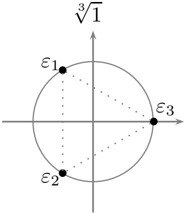
Geometrycznie pierwiastki *n*-tego stopnia z 1 są wierzchołkami *n*-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1:

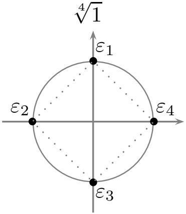


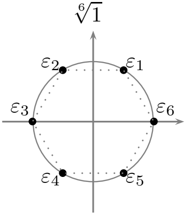


Pierwiastki *n*-tego stopnia z 1

Geometrycznie pierwiastki *n*-tego stopnia z 1 są wierzchołkami *n*-kąta foremnego wpisanego w okrąg o promieniu 1:







Pierwiastki *n*-tego stopnia z 1

Fakt

- *Wzór:* $\varepsilon_k = e^{\imath(2k\pi)/n}, \quad k = 1, 2, \ldots n$

Pierwiastki n-tego stopnia z 1

Fakt

- *Wzór:* $\varepsilon_k = e^{\imath(2k\pi)/n}, \quad k = 1, 2, \ldots n$
- *Pierwiastki n-tego stopnia tworzą grupę, tzn:*

$$\varepsilon_k, \varepsilon_l \in \sqrt[n]{1} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_k \cdot \varepsilon_l \in \sqrt[n]{1}$$

$$1 \in \sqrt[n]{1},$$

$$\forall k\, \exists l : \; \varepsilon_k \cdot \varepsilon_l = 1$$

Pierwiastki n-tego stopnia z 1

Fakt

Niech $z \in \mathbb{C}$ *oraz niech* w *będzie dowolnym rozwiązaniem równania* $w^n = z$, *wówczas*

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ w \cdot \varepsilon_k, \quad \textit{gdzie}\, \varepsilon_k \in \sqrt[n]{1},\ k = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

Pierwiastki n-tego stopnia z 1

Fakt

Niech $z \in \mathbb{C}$ oraz niech w będzie dowolnym rozwiązaniem równania $w^n = z$, wówczas

$$\sqrt[n]{z} = \left\{ w \cdot \varepsilon_k, \quad \textit{gdzie}\ \varepsilon_k \in \sqrt[n]{1},\ k = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

Ćwiczenie

Obliczyć sumę i iloczyn wszystkich pierwiastków ustalonego stopnia z 1:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_n = ? \qquad \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \ \cdots \ \cdot \varepsilon_n = ?$$

Nicolo Fontana Tartaglia (1500 Brescia - 1557 Wenecja)

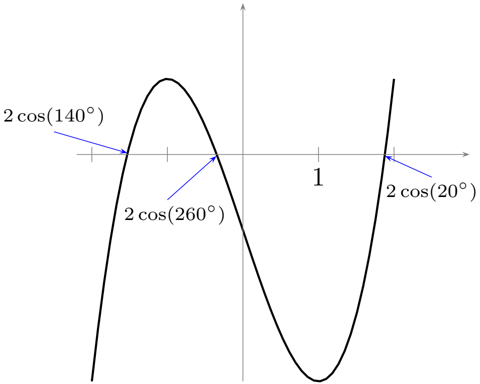
Girolamo Cardano (1501 Pavia - 1576 Rzym)

Równania trzeciego i czwartego stopnia

Rozwiązujemy na tablicy...

Równania trzeciego i czwartego stopnia

$$f(x) = x^3 - 3x - 1$$



Homografie

Na zakończenie wycieczki po liczbach zespolonych przyjrzyjmy się szczególnym odwzorowaniom ciała liczb zespolonych w siebie:

Homografie

Na zakończenie wycieczki po liczbach zespolonych przyjrzyjmy się szczególnym odwzorowaniom ciała liczb zespolonych w siebie:

$$h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, oraz $ad - bc \neq 0$.

Homografie

Na zakończenie wycieczki po liczbach zespolonych przyjrzyjmy się szczególnym odwzorowaniom ciała liczb zespolonych w siebie:

$$h : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$h(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

gdzie $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, oraz $ad - bc \neq 0$.

Odwzorowania takiej postaci nazywają się **HOMOGRAFIE**

Homografie

Homografie mają bardzo szczególne własności:

Homografie

Homografie mają bardzo szczególne własności:

- składają się tak jak macierze mnożą

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad h(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

Homografie

Homografie mają bardzo szczególne własności:

- składają się tak jak macierze mnożą

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad h(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

$$f(h(z)) = \frac{a\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+b}{c\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+d} = \frac{(a\alpha+b\gamma)z+(a\beta+b\delta)}{(c\alpha+g\gamma)z+(c\beta+d\delta)}$$

Homografie

Homografie mają bardzo szczególne własności:

- składają się tak jak macierze mnożą

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d} \qquad h(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$$

$$f(h(z)) = \frac{a\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+b}{c\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+d} = \frac{(a\alpha+b\gamma)z+(a\beta+b\delta)}{(c\alpha+g\gamma)z+(c\beta+d\delta)}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (a\alpha+b\gamma) & (a\beta+b\delta) \\ (c\alpha+g\gamma) & (c\beta+d\delta) \end{bmatrix}$$

Homografie

- przeprowadzają proste i okręgi na proste i okręgi

Homografie

- przeprowadzają proste i okręgi na proste i okręgi

Ćwiczenie

Niech

$$f(z) = \frac{z + (1 + \imath)}{z - \imath}.$$

Znaleźć obraz prostych $\Im z = 1$ *oraz* $\Im z = 2$ *w odwzorowaniu* f. *Znaleźć także obrazy okręgów* $|z| = 1$ *i* $|z| = 2$ *w tym samym odwzorowaniu*

Homografie

- przeprowadzają proste i okręgi na proste i okręgi

Ćwiczenie

Niech

$$f(z) = \frac{z + (1 + \imath)}{z - \imath}.$$

Znaleźć obraz prostych $\Im z = 1$ *oraz* $\Im z = 2$ *w odwzorowaniu* f. *Znaleźć także obrazy okręgów* $|z| = 1$ *i* $|z| = 2$ *w tym samym odwzorowaniu*

- zachowują kąty

Homografie

- przeprowadzają proste i okręgi na proste i okręgi

Ćwiczenie

Niech

$$f(z) = \frac{z + (1 + \imath)}{z - \imath}.$$

Znaleźć obraz prostych $\Im z = 1$ oraz $\Im z = 2$ w odwzorowaniu f. Znaleźć także obrazy okręgów $|z| = 1$ i $|z| = 2$ w tym samym odwzorowaniu

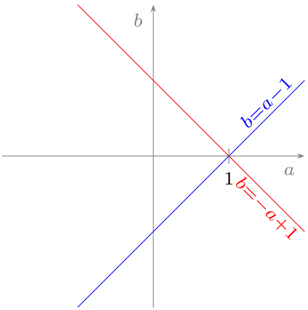
- zachowują kąty

Ćwiczenie

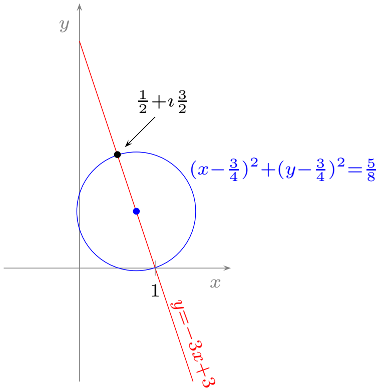
Znaleźć kąty między obrazami prostych $y = x - 1$ i $y = -x + 1$ w odwzorowaniu f

Homografie

$z = a + ib$



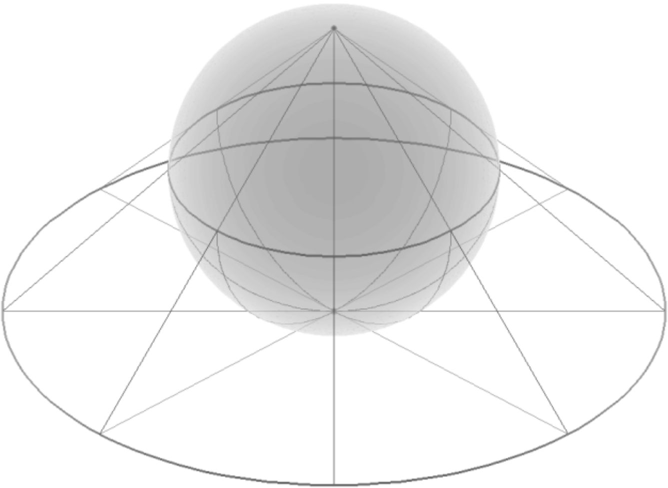
$w = x + iy$

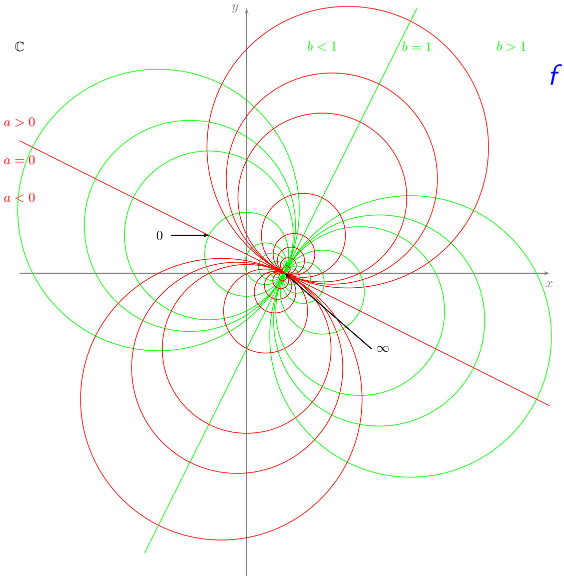


Sfera Riemanna

Co mają ze sobą wspólnego proste i okręgi w $\mathbb{C}$?

Sfera Riemanna





$$f(z) = \frac{z + (1 + \imath)}{z - \imath}$$