Zadania domowe z Analizy II, seria 1

Zadanie 1. Zbadać punktową i jednostajną zbieżność ciągów funkcji

$a)\ f_n(x) = \frac{n^2 x}{1+n^3x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$ $\qquad b)\ f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$

$c)\ f_n(x) = \frac{1}{x+n}, \quad 0 < x < \infty,$ $\qquad d)\ f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^n}, \quad 0 < x < 2,$

$e)\ f_n(x) = \frac{x^2}{n^2+(x-n)^2}, \quad x \in \mathbb{R},$ $\qquad f)\ f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+(x-n)^2}, \quad x \in \mathbb{R},$

$g)\ f_n(x) = \frac{nx-(n+1)x^2}{n-(n-1)x}, \quad x \in [0,1],$ $\qquad h)\ f_n(x) = \log(e^x + 1/n), \quad x \in \mathbb{R}.$

Zadanie 2. Zbadać zbieżność punktową i jednostajną szeregu funkcyjnego:

$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 x}{n^7+x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$ $\qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1+nx^2}}{x+n^2}, \quad x \in]0,\infty[,$

$c)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\log(1+nx)}{1+n^5x^2}, \quad x \in [0,\infty[,$ $\qquad d)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}, \quad x \in [0,\infty[.$

Zadanie 3. Wyrazić sumy następujących szeregów

$$\mathrm{Li}_{-n}(z) \equiv \sum_{k=1}^{\infty} k^n z^k, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n z^k}{k!}, \qquad n = 0,1,2,3,4$$

za pomocą funkcji elementarnych.

Zadanie 4. Rozwijając funkcję podcałkową w szereg, wykazać, że

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos x} \cos(\sin x) \cos(kx) dx = \frac{\pi}{k!}, \qquad k = 1,2,3\ldots$$

Zadanie 5. Obliczyć całki oznaczone

$$\text{(a)} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{3+5\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{(b)} \int_0^1 \frac{dx}{5+3\sqrt{1-x^2}}$$

$$\text{(c)} \int_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{x-x^2}} \qquad \text{(d)} \int_0^1 \frac{dx}{1-\sqrt{x-x^2}}$$

$$\text{(e)} \int_0^1 \frac{dx}{1+2\sqrt{x-x^2}}$$

Zadanie 6. Obliczyć całki oznaczone stosując wskazane podstawienia:

$$\int_1^2 \frac{x^2-2}{x^4+4} dx \quad t := x + \frac{2}{x}, \qquad \int_0^1 \frac{x(2-x)}{x^4+a^2(1-x)^2} dx,\ a > 0, \quad t = (1-x)x^{-2}$$

Zadanie 7. Obliczyć całkę

$$I := \int_{-2}^{2} \frac{f'(x)dx}{1+f^2(x)},$$

jeśli

$$\text{(a)} \quad f(x) := \frac{2x+1}{x(x^2-1)}, \qquad \text{(b)} \quad f(x) := \frac{2(x+1)}{\sqrt{3}\,(x^2-2)}.$$

Wykazać, że w przypadku (a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(x)dx}{1+f^2(x)} = \pi$$

zaś w przypadku (b)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'(x)dx}{1+f^2(x)} = -2\pi.$$