Analiza II - 2013/14 zadania domowe

Zadanie 1. Zbadać lokalną i globalną odwracalność odwzorowania:

a) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 + y^3 \\ x^5 - y^5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$

b) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x^3 - 3xy^2 \\ 3x^2y - y^3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$

Zadanie 2. Podane równania zapisać w nowych zmiennych:
a) $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + \sqrt{1+y^2}\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy$, jeśli $u = \log x$, $v = \log\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$;
b) $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = (y-x)z$, jeśli $u = x^2 + y^2$, $v = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, $w = w(u,v) = \log z - (x+y)$;

Zadanie 3. Niech $\phi \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Kiedy równanie $\phi(cx - az, cy - bz) = 0$
(a, b, c - ustalone parametry) wyznacza z jako funkcję x i y?
Wykazać, że jeśli $z = z(x,y)$ jest taką funkcją, to spełnia ona równanie

$$a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} = c.$$

Jaki jest sens geometryczny tego równania?

Zadanie 4. Zapisać 'laplasjan' $\Delta f(x, y.z) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ we współrzędnych:
a) walcowych (cylindrycznych)
b) sferycznych.

Zadanie 5. Znaleźć $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ jeśli $x = e^u + u\sin v$, $y = e^u - u\cos v$.

Zadanie 6. Funkcja $u = u(x)$ "określona" jest układem równań:

$$u = f(x,y,z), \quad g(x,y,z) = 0, \quad h(x,y,z) = 0$$

gdzie f, g, h są zadanymi funkcjami gładkimi na $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Znaleźć $\dfrac{du}{dx}, \dfrac{d^2u}{dx^2}$.

Zadanie 7. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu funkcji uwikłanej $z = z(x,y)$ opisanej równaniem $3x^2y^2 + 2z^2xy - 2zx^3 + 4xy^3 - 4 = 0$ w otoczeniu punktu $(2,1,2)$.

Zadanie 8. Zbadać czy podane zbiory są powierzchniami i opisać przestrzenie wektorów stycznych w podanych punktach:
a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = 2x^2 - 4y^2\ \}$, $p = (2,1,4)$
b) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0\ \}$, $p = (1,2,-1)$
c) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (z^2 - x^2)xyz - y^5 = 5\ \}$, $p = (1,1,2)$.
d) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = u + v,\ y = u^2 + v^2,\ z = u^3 + v^3,\ u, v \in \mathbb{R}\}$, $p-$ dowolny

Zadanie 9. Znaleźć płaszczyzné styczną do elipsoidy $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ i równoległą do płaszczyzny $x - y + 2z = 0$.