Analiza II, praca domowa, II seria, 2013/2014 roku

Zadanie 1. Obliczyć granice następujących funkcji

$a)$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x+y)^2}$ $\qquad b)$ $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{3(x-1)^2(y-1)^3}{(x^2-2x+y^2-2y+2)^2}$

$c)$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$ $\qquad d)$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y}{2x^6+y^3}$

$e)$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2)\cos(y^2)}{x^2+y^4}$ $\qquad f)$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)(x-y)}{x^3-y^3+xy^2-yx^2}$

$g)$ $\lim_{(x,y)\to(\pi,\pi)} x\sin\left(\frac{x+y}{4}\right)$ $\qquad h)$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-y^2}{x^2+y^2}$

Zadanie 2. Zbadać ciągłość następujących funkcji

$$a)\quad f(x,y)=\begin{cases}\frac{e^{xy}-1}{x}, & \text{dla } x\neq 0,\\ y, & \text{dla } x=0,\end{cases}$$

$$b)\quad f(x,y)=\frac{\cos(xy)}{x^2+y^2+1},$$

$$c)\quad f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\left[\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)+\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right)\right], & \text{dla } (x,y)\neq 0,\\ 0, & \text{dla } (x,y)=0\end{cases}$$

$$d)\quad f(x,y)=\begin{cases}\frac{\log(1+|xy|)}{|xy|} & \text{dla } xy\neq 0,\\ 1, & \text{dla } xy=0,\end{cases}$$

Zadanie 3. Zbadaj ciągłość i różniczkowalność następujących funkcji

$$f_1(x,y)=\begin{cases}\frac{xy(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq 0,\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}\qquad f_2(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq 0,\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$f_3(x,y)=\begin{cases}\frac{xy+x^2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq 0,\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Zadanie 4. Zbadaj różniczkowalność funkcji $f(x,y)=|xy|\sin(xy)$.

Zadanie 5. Obliczyć pochodne cząstkowe rzędu pierwszego następujących funkcji: $a) f(x,y)= x\sqrt{y}-e^x\log y$, $b) f(x,y,z)=x^{yz}$, $c) f(x,y,z)=a^{\arctan(x/y)}$, $d) f(x,y,z)=(xyz)/(x^2+y^2+z^2)$.

Zadanie 6. Niech $f=f(t,u,v)$ będzie funkcją różniczkowalną. Policzyć pochodne cząstkowe funkcji:

$$a)\, g(x,y)=f(x^2+y^2,x^2-y^2,2xy),\qquad b)\, g(x,y)=f(xy,x/y),$$
$$c)\, g(x,y,z)=f(x,xy,xyz).$$

Zadanie 7. Obliczyć pochodne kierunkowe funkcji

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{dla } (x,y)\neq 0,\\ 0, & \text{dla } (x,y)=0,\end{cases}$$

w kierunku wektora $v=(a,b)$ w punkcie $(0,0)$.

Zadanie 8. Znajdź macierz odwzorowania (f') w punkcie $(1,1,1)$ oraz pochodną w punkcie $(1,1,1)$ następujących funkcji w podanych kierunkach:

$$a)\, f(x,y,z)=(x-2y+3z)^2,\quad h=(1,2,3),\qquad b)\, f(x,y,z)=\frac{2x+3z}{x+2y},\quad h=(1,2,-1),$$
$$c)\, f(x,y,z)=\frac{x}{y}+\frac{y}{z},\quad h=(3,2,1).$$

Zadanie 9. Sprawdź, że funkcja

$$f_n = \sum_{k=2}^{n-1} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

spełnia, że

$$x\frac{\partial f_n}{\partial x} + y\frac{\partial f_n}{\partial y} = nf_n$$

dla każdego $n \in \mathbb{N}$ większe od 2.

Zadanie 10. Obliczyć $\partial^2 f/\partial x\partial y, \partial^2 f/\partial y\partial x$ dla funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{dla } (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{dla } (x,y) = 0. \end{cases}$$

Zadanie 11. Czy istnieje funkcja $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ taka, że $\partial f/\partial x = 2x^5 - 6$ i $\partial f/\partial y = 2y + 5$?

Zadanie 12. Prawo stanu gazu doskonałego przyjmuje postać: $PV = nRT$, gdzie P to ciśnienie gazu, V to objętość gazu, n to ilość moli, T to temperatura i R to stała gazowa. Wykaż, że

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_{T=cte} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{P=cte} \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{V=cte} = -1.$$

Zadanie 13. Znaleźć największe i najmniejsze wartości funkcji

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(x^2+y^2)/(x^2+y^2), & \text{dla } (x,y) \neq 0, \\ 0, & \text{dla } (x,y) = 0, \end{cases}$$

na zbiorze $K = \{(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leqslant \pi/2\}$.

Zadanie 14. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne funkcji $f : \mathbb{R}^3 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}$ postaci

$$f(x,y,z) = ax + by + \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}, \qquad a^2+b^2 \neq 0.$$

Zadanie 15. Niech $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana wzorem $f(x,y) = e^{-2x}(x+y)(x^2+x-y)$. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne(stacjonarne) f.

Zadanie 16. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne(stacjonarne) funkcji $f : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ określonej wzorem $f(x,y,z) = x + 4y + \frac{1}{z} + \frac{z+1}{xy}$.

Zadanie 17. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne(stacjonarne) funkcji $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana wzorem

$$f(x,y) = \frac{x+y}{(x^2+1)(y^2+1)}.$$

Zadanie 18. Znaleźć i zbadać punkty krytyczne(stacjonarne) funkcji

$$f(x,y) = x^4 + y^4.$$