

Zadanie 1. Rozwiązać następujące równania o rozdzielonych zmiennych:

$$a) \frac{dy}{dx} = \frac{y^2(x-3)}{x^3}, \quad b) \frac{dy}{dx} = y(1+e^x), \quad c) \frac{dy}{dx} = \frac{y \log y}{x}, \quad d) \frac{dy}{dx} = \sqrt{1-y^2}.$$

Zadanie 2. Rozwiązać następujące zagadnienia początkowe:

$$a) \frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{y}, \quad y(0) = 1, \quad b) \frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{\sin x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 7.$$

Zadanie 3. Rozwiązać następujące równania jednorodne:

$$a) \frac{dy}{dx}y - y + \frac{y^2}{x} - \frac{y^3}{x^2} = 0, \quad b) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sin\left(\frac{y}{x}\right)} + \frac{y}{x}.$$

$$c) \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{xy}, \quad d) \frac{dy}{dx} = \frac{2(x+2y)}{x-y}.$$

Zadanie 4. Rozwiązać następujące zagadnienie początkowe:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x + \sqrt{x^2 + t^2}}{t}, \quad x(-1) = 0, \quad t \neq 0.$$

Zadanie 5. Rozwiązać następujące równania liniowe:

$$a) \frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2, \quad b) \frac{dy}{dx} = -2xy + 1, \quad c) x\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x - 1 + \frac{1}{x}.$$

Zadanie 6. Rozwiązać następujące równania Bernouillego:

$$a) \frac{dy}{dx} + \frac{x}{x^2-1}y - x^2\sqrt{y}, \quad b) x\frac{dy}{dx} + y = -xy^2,$$

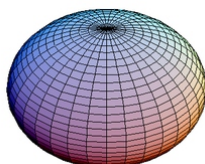
$$c) \frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{y^3}{x^2}, \quad d) \frac{dy}{dx} + y = xy^3.$$

Zadanie 7. Rozwiązać zagadnienie początkowe postaci

$$\frac{dx}{dt} + 2x = 4\sqrt{x} \frac{e^{-t}}{1+4t^2}, \quad x(0) = 1.$$

Zadanie 8. Obliczyć objętość bryły ograniczonej powierzchnią o równaniu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

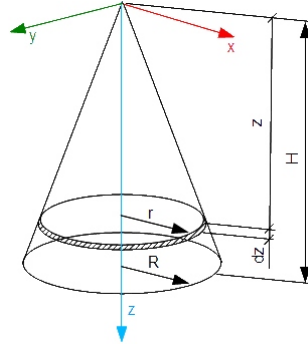


$$(R: \frac{4}{3}abc\pi).$$

Zadanie 9. Wyznaczyć położenie środka ciężkości jednorodnej figury płaskiej ograniczonej parabolą $y = kx^2$ oraz prostymi $x = b$, $y = 0$.

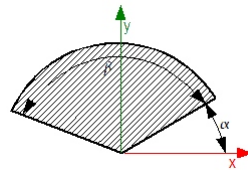
$$(R: x_{sc} = 3b/4, y_{sc} = 3kb^2/5).$$

Zadanie 10. Znaleźć położenie środka ciężkości jednorodnego stożka kołowego o wysokości H , stałej gęstości ρ i promieniu podstawy R .

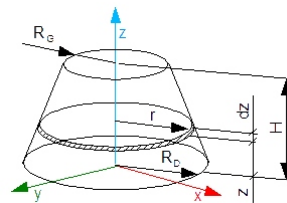


$$(R: x_{sc} = 0, y_{sc} = 0, z_{sc} = H/4)$$

Zadanie 11. Wyznaczyć środek ciężkości wycinka okręgu o promieniu R , stałej gęstości ρ , kącie β i kącie położenia α .

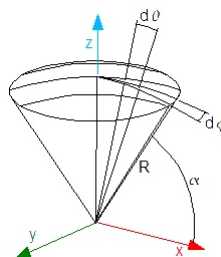


Zadanie 12. Wyznaczyć środek ciężkości jednorodnego stożka ściętego



$$z_{sc} = \frac{1}{4}H \frac{R_D^2 + 2R_D R_G + 3R_G^2}{R_D^2 + R_D R_G + R_G^2}.$$

Zadanie 13. Wyznaczyć środek ciężkości jednorodnego wycinka kuli.



$$z_{sc} = \frac{3R \cos^2 \alpha}{8(1 - \sin \alpha)}.$$