

**Pytanie 1** Definicja powierzchni zanurzonej. Sposoby opisu powierzchni zanurzonej w przestrzeni afinicznej. Czy każda powierzchnia zanurzona jest poziomicą odwzorowania różniczkowalnego?

**Pytanie 2** Co to jest przestrzeń afiniczna? Krzywe i funkcje różniczkowalne w przestrzeni afinicznej. Przestrzeń styczna i kostyczna do przestrzeni afinicznej.

**Pytanie 3** Przestrzeń styczna do powierzchni zanurzonej i baza związana z układem współrzędnych. Zapisać pole wektorowe  $\partial_\varphi + \sin\vartheta\partial_\theta$  (określone we współrzędnych sferycznych) na sferze o promieniu 1 we współrzędnych stereograficznych.

**Pytanie 4** Jak wprowadzić strukturę przestrzeni wektorowej w  $T_qS$  ( $S$  jest powierzchnią).

**Pytanie 5** Przestrzeń kostyczna do powierzchni  $S$ . Baza związana z układem współrzędnych. Niech  $S = \{(x, y, z) : z^2 - x^2 - y^2 = 1, z > 0\}$ . Wprowadzić na  $S$  wygodne współrzędne i zapisać w tych współrzędnych różniczkę funkcji będącej obcięciem do  $S$  funkcji  $f(x, y, z) = x^2 + z^2 - xz$ .

**Pytanie 6** Co to jest gradient funkcji? Wyrazić gradient w wybranych współrzędnych na powierzchni  $S = \{(x, y, z) : z^2 - x^2 - y^2 = 1, z > 0\}$  względem iloczynu skalarnego indukowanego z  $\mathbb{R}^3$ .

**Pytanie 7** Udowodnić, że istnieje jednoznaczna odpowiedniość między różniczkowaniami algebry  $C^\infty(S)$  o wartościach rzeczywistych nad ewaluacją w punkcie  $x$  a wektorami stycznymi do  $S$  w punkcie  $x$ .

**Pytanie 8** Niech  $X, Y$  będą polami wektorowymi na  $S$ . Zdefiniować nawias Liego  $[X, Y]$  i przedstawić jego własności.

**Pytanie 9** Co to jest odwzorowanie styczne? Niech  $M = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a > 0\}$ . Każdy punkt  $(a, b) \in M$  identyfikujemy z macierzą

$$m(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{bmatrix}$$

i dla ustalonego punktu  $(a, b)$  definiujemy odwzorowanie  $L_{(a,b)} : M \rightarrow M$ : Wartość  $L_{(a,b)}$  w punkcie  $(x, y)$  to punkt odpowiadający iloczynowi macierzy  $m(a, b)m(x, y)$ . Niech  $v$  będzie wektorem  $\partial_a$  zaczepionym w punkcie  $(1, 0)$ . Opisać we współrzędnych pole wektorowe  $F$  na  $M$  zdefiniowane wzorem  $F(a, b) = TL_{(a,b)}(v)$ .

**Pytanie 10** Co to jest cofnięcie formy? Niech  $M = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a > 0\}$ . Każdy punkt  $(a, b) \in M$  identyfikujemy z macierzą

$$m(a, b) = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1/a \end{bmatrix}$$

i dla ustalonego punktu  $(x, y) \in M$  definiujemy odwzorowanie  $L_{(x,y)} : M \rightarrow M$  następująco: wartość  $L_{(x,y)}$  w punkcie  $(a, b)$  to punkt odpowiadający iloczynowi macierzy  $m(x, y)m(a, b)$ . Znaleźć

$$L_{(x,y)}^* da, \quad L_{(x,y)}^* db.$$

**Pytanie 11** Przestrzeń odwzorowań wieloliniowych na przestrzeni wektorowej: definicja, wymiar, baza

**Pytanie 12** Iloczyn zewnętrzny: definicja, własności. Niech  $\alpha$  będzie dwukowektorem na  $V$  a  $\beta$  kowektorem. Obliczyć  $\alpha \wedge \beta(v_1, v_2, v_3)$ .

**Pytanie 13** Różniczka zewnętrzna: definicja i własności. Niech  $\alpha = xydy \wedge dz + x^2zydx \wedge dz$  będzie dwuformą na  $\mathbb{R}^3$ . Obliczyć  $d\alpha$ .

**Pytanie 14** Wzór Cartana na różniczkę zewnętrzną  $k$ -formy. Wzór Tulczyjewa na różniczkę jednoformy.

**Pytanie 15** Forma pierwotna, formy zamknięte i zupełne: definicje, własności.

**Pytanie 16** Lemat Poincaré - sformułowanie i szkic dowodu.

**Pytanie 17** Co to jest i do czego służy gładki rozkład jedności. Proszę przedstawić szkic konstrukcji gładkiego rozkładu jedności.

**Pytanie 18** Obliczyć całkę z formy  $dy \wedge dz$  po fragmencie sfery  $S^2$  dla którego  $x \geq 0$  i  $z \geq 0$  z wybraną orientacją. sformułować definicję całki z formy różniczkowej i przedyskutować rolę orientacji.

**Pytanie 19** Sformułować twierdzenie Stokes'a i podać szkic dowodu.

**Pytanie 20** Twierdzenie Stokes'a w analizie wektorowej. Wzory, dowody (nie koniecznie wszystkie).

**Pytanie 21** Dywergencja i rotacja, laplasjan funkcji na powierzchni z iloczynem skalarnym. Definicje, wzory w przypadku  $\mathbb{R}^3$ , własności.

**Pytanie 22** Gwiazdka Hodge'a. Definicja, własności. Wyznaczyć w  $*d\vartheta$  w  $\mathbb{R}^3$ .

**Pytanie 23** Pochodna Liego form różniczkowych: definicja, wzory, własności. Obliczyć  $\mathcal{L}_X\Omega$  jeśli  $\Omega$  jest formą objętości.

**Pytanie 24** Jednoparametrowa grupa dyfeomorfizmów związana z polem wektorowym. Całkowanie pól wektorowych. Znaleźć jednoparametrową grupę dyfeomorfizmów na  $\mathbb{R}^2$  związaną z polem  $x\partial_y - y\partial_x$ .

**Pytanie 25** Definicja i własności pochodnej kowariantnej na powierzchni zanurzonej w  $R^n$ , symbole Christoffela. Wiedząc, że jeśli  $\alpha$  i  $\beta$  są jednoformami, to  $\nabla_X(\alpha \otimes \beta) = (\nabla_X\alpha) \otimes \beta + \alpha \otimes (\nabla_X\beta)$  wyprowadzić wzór na pochodną kowariantną  $f(x)_{ij}dx^i \otimes dx^j$  w kierunku pola  $X^i\partial_i$  (we współrzędnych).

**Pytanie 26** Przesunięcie równoległe wektorów na powierzchni zanurzonej w  $\mathbb{R}^n$ : definicja, przykłady.