

Geometria Różniczkowa II

pytania egzaminacyjne

Pytanie 1 Wiązka styczna $\mathbb{T}E$ do przestrzeni totalnej wiązki wektorowej $\tau : E \rightarrow M$ jest wiązką wektorową na dwa sposoby. Proszę wyjaśnić strukturę wektorową w wiązce $\mathbb{T}\tau : \mathbb{T}E \rightarrow \mathbb{T}M$. W wersji trudniejszej tego pytania można zastanowić się nad wiązką dualną do $\mathbb{T}\tau$. Ciekawe co to może być? (Na wykładzie nie było o tym mowy, przynajmniej nie dla dowolnej wiązki E)

Pytanie 2 Proszę wyjaśnić pojęcie koneksji liniowej w wiązce wektorowej. Co to są symbole Christoffela? Niech \mathcal{H} oznacza dystrybucję horyzontalną liniowej koneksji w wiązce $\tau : E \rightarrow E$. Jak wygląda \mathcal{H}_{0_m} , gdzie 0_m jest wektorem zerowym we włóknie $\tau^{-1}(m)$?

Pytanie 3 Proszę zdefiniować pochodną kowariantną związaną z koneksją liniową w wiązce wektorowej oraz podać wzory na pochodną cięcia wiązki τ oraz cięcia wiązki dualnej z użyciem współrzędnych.

Pytanie 4 W języku polskim koneksję nazywa się także powiązaniem. Co z czym powiązanie wiąże? Wyjaśnić pojęcie przesunięcia równoległego.

Pytanie 5 Wyjaśnić związek między krzywizną koneksji liniowej a twierdzeniem Frobeniusa.

Pytanie 6 Zdefiniować pojęcie tensora krzywizny koneksji liniowej i wyprowadzić wzory na współczynniki tego tensora we współrzędnych.

Pytanie 7 Co to jest torsja koneksji? Proszę wyprowadzić stosowne wzory we współrzędnych.

Pytanie 8 Proszę zdefiniować koneksję liniową w wiązce wektorowej wychodząc od pojęcia pochodnej kowariantnej.

Pytanie 9 Co to jest koneksja metryczna? Warto posłużyć się zarówno pojęciem pochodnej kowariantnej jak i odpowiednim diagramem. Proszę wyprowadzić wzory na współczynniki Christoffela koneksji metrycznej.

Pytanie 10 Własności i symetrie tensora krzywizny koneksji metrycznej w wiązce stycznej. Może którąś z symetrii (nie koniecznie tę najprostrszą) da się udowodnić?

Pytanie 11 Twierdzenie Frobeniusa, sformułowanie i szkic dowodu.

Pytanie 12 Co to jest i do czego służy operator Weingartena?

Pytanie 13 Definicja i własności pochodnej kowariantnej dla powierzchni zanurzonych w \mathbb{R}^n . Własności, przykłady...

Pytanie 14 Co to są krzywizny główne i kierunki główne? Wyznaczyć krzywizny główne na torusie $(r - a)^2 + z^2 = b^2$ zanurzonym w \mathbb{R}^3 . r oznacza współrzędną radialną pochodzącą z walcowego układu współrzędnych w \mathbb{R}^3 .

Pytanie 15 Co to jest krzywizna Gaussa?

Pytanie 16 Na przykładzie grup $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ i $SL(2, \mathbb{R})$ opowiedzieć o lewoniemniczych polach wektorowych na grupie Liego.

Pytanie 17 Co to jest reprezentacja dołączona grupy Liego G na algebrze \mathfrak{g} ? Proszę omówić przykład wybranej grupy macierzowej.

Pytanie 18 Co to jest koneksja niezmiennicza na wiązce głównej? Proszę zacząć od definicji wiązki głównej.

Pytanie 19 Forma koneksji i forma krzywizny na wiązce głównej – definicja i własności.

Pytanie 20 Co to jest rozmaitość symplektyczna? Jakie są podstawowe własności formy symplektycznej?

Pytanie 21 Twierdzenie Darboux - sformułowanie, szkic dowodu.

Pytanie 22 Forma symplektyczna na wiązce kostycznej, definicja, własności, wyrażenie na współrzędnych

Pytanie 23 Co to jest pole hamiltonowskie i jakie są jego własności. Wzory na współczynniki pola hamiltonowskiego na wiązce kostycznej.

Pytanie 24 Proszę wykazać wzór $\alpha^*\theta_M = \alpha$, gdzie $\alpha : M \rightarrow T^*M$ jest jednoformą bez użycia współrzędnych.

Pytanie 25 Co to jest endomorfizm wewnętrzny S na wiązce stycznej? Proszę podać definicję oraz wyrażenie na współrzędnych.

Pytanie 26 Zdefiniować odwzorowanie κ_M i podać jego wyrażenie we współrzędnych.

Pytanie 27 Zdefiniować odwzorowanie α_M i podać jego wyrażenie we współrzędnych.

Pytanie 28 Wykazać wzór

$$\kappa_M(\mathbb{T}Y(X)) - \mathbb{T}X(Y) = [X, Y]_X^\vee,$$

gdzie X, Y są gładkimi polami wektorowymi na M .

Pytanie 29 Niech L będzie hiperregularnym lagranżjanem na wiązce stycznej $\mathbb{T}M$. Wyprowadzić we współrzędnych wzory na współczynniki pola wektorowego X_{E-L} na $\mathbb{T}M$ reprezentującego równanie Eulera-Lagrange'a.

Pytanie 30 Wyprowadzić X_{E-L} dla $L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j - V(q^i)$.

Pytanie 31 Opisać dynamikę cząstki relatywistycznej wynikającą z lagranżjanu $LTM \rightarrow \mathbb{R}$, $L(q, v) = m\sqrt{\eta(v, v)}$, gdzie η jest metryką Minkowskiego a M afiniczną przestrzenią Minkowskiego.