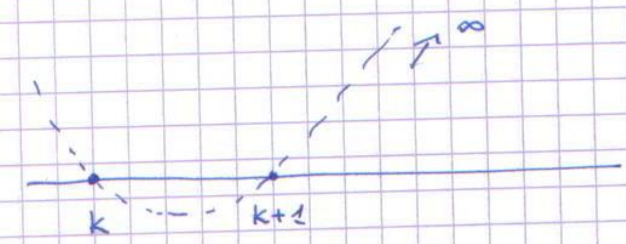
Zadanie 1

$$A_n^k = \left[-\left\{\left(1-\frac{1}{2^k}\right) + (n-k)(n-k-1)\right\},\ 1-\frac{1}{2^k} + (n-k)(n-(k+1)) \right]$$

$$= \left[-x_n^k,\ x_n^k\right] \qquad x_n^k = 1-\frac{1}{2^k}+y_n^k \qquad y_n^k = (n-k)(n-(k+1))$$

Niech $C^k = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^k$

$n \longmapsto y_n^k$



dla $n \to \infty$ $\quad y_n^k \to \infty$ zatem $C^k = \mathbb{R}$

$B_1 = \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k = \mathbb{R}$ $\qquad \inf B_1 = -\infty \quad \sup B_1 = +\infty$

Niech $D^k = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^k$ $\qquad$ dla $\begin{cases} n = k \\ n = k+1 \end{cases}$ $y_n^k = 0$

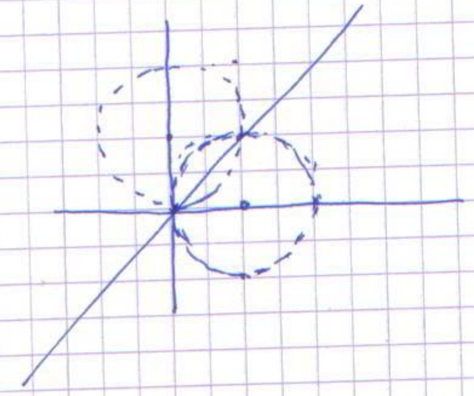
zatem $A^k_{k} = A^k_{k+1} = \left[-1+\frac{1}{2^k},\ 1-\frac{1}{2^k}\right] \subset A_n^k$ dla $n \in \mathbb{N}$

zatem $D^k = \left[-1+\frac{1}{2^k},\ 1-\frac{1}{2^k}\right]$

$B_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} D^k =]-1, 1[$ $\qquad \inf B_2 = -1 \quad \sup B_2 = 1.$

Zadanie 2

$$B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y)^2 \le 1 \}$$



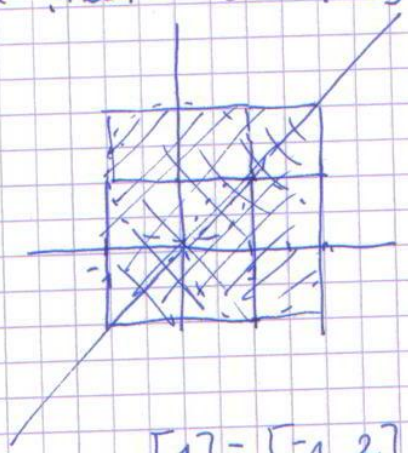
symetria wymaga by dodać

$$B' = \{ (x,y) : (x^2) + (y-1)^2 \le 1 \}$$

zwrotność wymaga by dodać

$$D = \{ (x,y) : x = y \}$$

Widać teraz, że np $1 \sim x$ dla $x \in [-1,1]$, czyli wszystkie liczby z odcinka $[-1,1]$ są sobie równoważne tzn. dodajemy kwadrat. ale $0 \sim [1,2]$



zatem $[1,2]$ równoważne ze sobą oraz z $[-1,1]$

ostatecznie

$$R = \{ (x,y) : (x \in [-1,2] \text{ i } y \in [-1,2]) \text{ lub } x = y$$

$$[1]_R = [-1,2] \quad , \quad [5]_R = \{5\}$$

Zadanie 3

$$x_{n+1} = 2 + 3/x_n$$

Dla $n = 2$

$$L = |x_2 - 3| \qquad P = \frac{4}{2^2} |x_2 - 3|$$

$L = P$ założenie spełnione

Zał: $|x_n - 3| \leq \frac{4}{2^n} |x_2 - 3|$

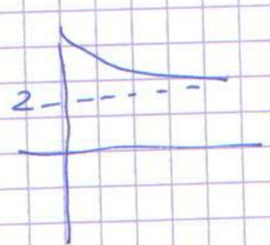
Teza j.w. dla x_{n+1}

$$|x_{n+1} - 3| = \left| 2 + \frac{3}{x_n} - 3 \right| = \left| \frac{3}{x_n} - 1 \right| = \left| \frac{3 - x_n}{x_n} \right| =$$

$$= \frac{1}{x_n} |x_n - 3| \leq \frac{1}{x_n} \frac{1}{2^n} |x_2 - 3| \quad \ldots$$

dodatni

$x_n \in f(]0, \infty[) \qquad f(x) = 2 + 3/x$



$]2, \infty[$

i.e. $x_n > 2 \qquad 1/x_n < 1/2$

$$\leq \frac{1}{2} \frac{1}{2^n} |x_2 - 3| = \frac{1}{2^{n+1}} |x_2 - 3| \quad \square.$$

$|x_2 - 3|$ jest stałą liczbą, skoro więc

$$|x_n - 3| < \frac{4}{2^n} |x_2 - 3|$$

$\to 0$ z definicji granicy ciągu

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 3.$$

Zadanie 4

$$\lim_{n\to\infty} a_n \overset{St}{=} \lim \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2n+2}}\right)-\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\frac{1}{\sqrt{2n+2}}\right)}{n+2-(n+1)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}{1}\cdot\frac{-\sqrt{(2n+1)(2n+2)}+\sqrt{n(2n+1)}+\sqrt{n(2n+2)}}{\sqrt{n}\sqrt{2n+1}\sqrt{2n+2}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}\right)\frac{1}{\underset{n^{3/2}}{\sqrt{n(2n+1)(2n+2)}}}\left(\overset{n^{3/2}}{-2\sqrt{(n+\tfrac{1}{2})(n+1)}}+\sqrt{2n^2+n}+\sqrt{2n^2+2n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{1+2/n}+\sqrt{1+1/n}\right)\left(-\sqrt{(2+\frac{1}{n})(2+\frac{2}{n})}+\sqrt{2+1/n}+\sqrt{2+2/n}\right)}{\sqrt{(2+1/n)(2+2/n)}} =$$

$$= \frac{(1+1)\left(-\sqrt{4}+\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{4}} = \frac{2(-2+2\sqrt{2})}{2} =$$

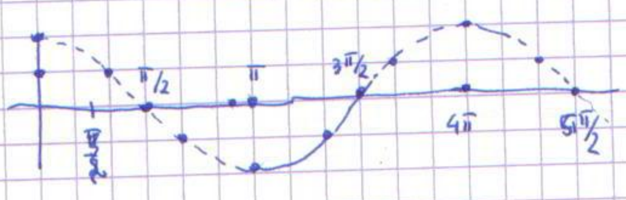
$$= \boxed{2(\sqrt{2}-1)}$$

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+5n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\cos\left(\pi\left(\sqrt{n^2+5n+1}-\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\pi\left(\sqrt{}-\sqrt{}\right)\right)\underbrace{\overset{\cos}{\cancel{\sin}}(n\pi)}_{(-1)^n} - \sin\left(\pi\left(\sqrt{}-\sqrt{}\right)\right)\underset{0}{\underset{\shortparallel}{\sin n\pi}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cos\left(\pi\left(\frac{n^2+5n+1-n^2}{\sqrt{}+\sqrt{}}\right)\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (-1)^n\cos\left(\pi\left(\frac{5n+1}{\sqrt{n^2+5n+1}+n}\right)\right) = \lim_{n\to\infty}(-1)^n\cos\left(\pi\underbrace{\frac{5}{\sqrt{1+\frac{5n}{n}+\frac{1}{n^2}}+1}}_{\to\ 5/2}\right)$$



$$\cos\left(5\frac{\pi}{2}\right)=0$$

$$\boxed{=0}$$

Zadanie 5

Załóżmy najpierw, że A i B są otwarte.
Zauważmy także, że można dowodzić jedną z równości podanych w tezie, gdyż całość jest symetryczna ze względu na zamianę A na B.

Niech więc A, B otwarte i (a.a.) $x \in \overline{A \setminus B}$ i $x \in B \setminus A$. Skoro $x \in B \setminus A$ to $x \in B$ i $x \notin A$.
Wynika z tego że $x \notin A \setminus B$. Punkt x musi więc być punktem skupienia $A \setminus B$ nie należącym do zbioru, a więc granicą jakiegoś ciągu elementów tego zbioru. Weźmy więc $y_n \longrightarrow x$ i $y_n \in A \setminus B$. W szczególności więc $y_n \notin B$, czyli $y_n \in B'$ ale B' domknięty więc $\lim y_n = x \in B'$. Okazuje się więc, że $x \in B$ i $x \in B'$ $\longrightarrow$ sprzeczność.

W przypadku gdy A i B są ~~obo~~ oba domknięte rozumowanie przebiega podobnie (a.a)
Weźmy $x \in \overline{(A \setminus B)}$ i $x \in B \setminus A \Rightarrow x \in B$ i $x \notin A$
ale $x \in \overline{A \setminus B}$ tzn. $\exists y_n$: $y_n \in A \setminus B$ i $y_n \longrightarrow x$
w szczególności $y_n \in A$ zatem z domkniętości A
$\lim y_n = x \in A$ Mamy więc $x \notin A$ i $x \in A$ $\longrightarrow$
$\longrightarrow$ sprzeczność

$\square$