Zadania domowe z Analizy IR. Seria 1. 20.10.2013

1. Wykazać, że $n! \leqslant (\frac{n+1}{2})^n$ dla $n \in \mathbb{N}$.

2. Dla jakich $n \in \mathbb{N}$ zachodzą nierówności: $2n+1 < 2^n$; $3n^3+1 < 2^n$; $n! < 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$; $(2n-1)!! \leqslant 2^{n-2}n!$?

3. Niech $a_1, a_2 \ldots, a_{100} \in \mathbb{R}$ — dane liczby, $s := |a_1 + a_2 + \ldots + a_{100}|$. Dowieść, że istnieje permutacja $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ liczb $a_1, \ldots, a_{100}$, taka że $|b_1| \geqslant \frac{1}{100}s$, $|b_1+b_2| \geqslant \frac{2}{100}s, |b_1+b_2+b_3| \geqslant \frac{3}{100}s, \ldots, |b_1 + b_2 + \ldots + b_{99}| \geqslant \frac{99}{100}s$.

4. Uprościć warunek:
   (a) $A \cup B \subset A \cup (B \cap C)$; (b) $(A \cap B) \cup (C \cap B) = B$; (c) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup B$;
   (d) $(A \cup B) \setminus (B \cap C) = A \cap C$; (e) $(A \cup B \cup C) \setminus (A \cup B) = C$; (f) $A \setminus B = B \setminus A$; (g) $A \cap B = (A \cup C) \cap (B \setminus C)$.

5. Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D zachodzą równości:
   (a) $(A \setminus B) \cup C = [(A \cup C) \setminus B] \cup (B \cap C)$; (b) $(A \setminus B) \cap (C \setminus D) = (A \cap C) \setminus (B \cup D)$;
   (c) $A \setminus (B \cup C \cup D) = ((A \setminus B) \setminus C) \setminus D$; (d) $A \setminus [B \setminus (C \setminus D)] = (A \setminus B) \cup (A \cap C \setminus D)$.

6. Niech $A \div B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$(*różnica symetryczna* zbiorów). Wykazać, że: działanie $\div$ jest przemienne i łączne; $(A \div B) \cap C = (A \cap C) \div (B \cap C)$; $A \div A = \emptyset$; $A \div \emptyset = A$; $A_1 \div A_2 \div \cdots \div A_n = \{x \in X : \ x$ należy do nieparzystej liczby zbiorów $A_1, \ldots, A_n\}$. Wyrazić sumę i różnicę mnogościową zbiorów poprzez operacje $\cap$ i $\div$.

7. Wykazać, że odwzorowanie $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $f(x, y) := (x + y, \frac{1}{x} - \frac{1}{y})$, jest bijektywne, wyliczyć f^{-1}.

8. Wyliczyć:
   $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\frac{3}{n}, \frac{4}{n}\right]$; $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left]\frac{n}{n+1}, \frac{5}{n} + \frac{n}{10}\right[$; $\bigcup_{r \in \mathbb{R}} \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : \ (x_1 - r)^2 + (x_2 + 2r)^2 \leqslant r^2 + 1\}$;
   $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left([0, n] \cup [n^2, \infty[, \right)$; (e) $\bigcup_{t \in [2,3]} A_t$ oraz $\bigcap_{t \in [2,3]} A_t$, gdzie $A_t := [t, 2t] \times [-t, t]$;
   (f) $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left]\frac{n}{(n+1)^2}, \frac{1}{n+1}\right[$; (g) $\bigcap_n A_n$, $\liminf A_n := \bigcup_n \bigcap_{k \geqslant n} A_k$, $\limsup A_n := \bigcap_n \bigcup_{k \geqslant n} A_k$ i $\bigcup_n A_n$, jeśli $A_n := \left[\frac{n(-1)^n}{n+1}, \frac{2n}{n+1}\right]$ dla $n \in \mathbb{N}$.

9. Niech $A_n \subset X$, $A'_n := X \setminus A_n$. Wykazać, że $(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} (\bigcup_{k<n} A_k \cup \bigcup_{k \geqslant n} A'_k) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A_{n+1})$.

10. Obliczyć $\bigcap_n A_n$, $\liminf A_n := \bigcup_n \bigcap_{k \geqslant n} A_k$, $\limsup A_n := \bigcap_n \bigcup_{k \geqslant n} A_k$ i $\bigcup_n A_n$, jeśli $A_n := \left[\frac{1}{n} + Q(\frac{n}{3}), \frac{3n+1}{2n-1}\right]$ dla $n \in \mathbb{N}$, gdzie $Q(x) := x - E(x)$.

11. Dla $s \geqslant 0$ oznaczmy $K_s := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - s)^2 \leqslant s\}$. Wykazać, że mają miejsce następujące zawierania: $\{(x, y) : y \geqslant x^2\} \subset \bigcup_{s \in \mathbb{N}} K_s \subset \bigcup_{s \in]0, \infty[} K_s = \{(x, y) : y \geqslant x^2 - \frac{1}{4}\}$.

12. Określmy następujące podzbiory $\mathbb{R}^3$: $S := \{(x, y, z) : \ (x^2 + y^2 > 0, \ z = \frac{2xy}{x^2+y^2})$ lub $(x = y = 0, \ |z| \leqslant 1)\}$, $S_1 := \{(x, y, z) : \ |z| \leqslant 1, \ y = \frac{z}{1+\sqrt{1-z^2}} x\}$, $S_2 := \{(x, y, z) : \ |z| \leqslant 1, \ x = \frac{z}{1+\sqrt{1-z^2}} y\}$. Dowieść, że $S = S_1 \cup S_2$ oraz wyznaczyć $S_1 \cap S_2$.

13. Niech X będzie zbiorem nieprzeliczalnym, a $f : X \longrightarrow]0, \infty[$ — dowolną funkcją. Wykazać, że istnieje $n \in N$ oraz parami różne elementy $x_1, \ldots, x_n \in X$, takie że $f(x_1) + \ldots + f(x_n) > 100$.

14. Wykazać, że $\bigcap(A_n \cup B_n) \supset (\bigcap A_n) \cup (\bigcap B_n)$. Znaleźć przykład, gdy nie ma równości. Pokazać, że w przypadku, gdy oba ciągi są *zstępujące* (tzn. $\forall n \in \mathbb{N} : \ A_{n+1} \subset A_n, \ B_{n+1} \subset B_n$), powyższa inkluzja przechodzi w równość.

15. Niech $\emptyset \neq X$ będzie zbiorem skończonym oraz $f : X \to X$. Wykazać, że:
    (a) $R := \{(x, y) \in X \times X : \ \exists k, l \in N : f^k(x) = f^l(y)\}$ jest relacją równoważności w X;
    (b) zbiór $X_0 := \bigcap_{k \in N} f^k(X)$ jest niepusty, $f(X_0) = X_0$ oraz $f|_{X_0} : X_0 \to X_0$ jest bijekcją;
    (c) każda orbita $f|_{X_0}$ zawiera się w jednej z klas relacji R i każda z klas relacji R zawiera dokładnie jedną orbitę. Zatem $|X/R|$ jest liczbą cykli permutacji $f|_{X_0}$.

16. Sprawdzić, że dana relacja jest relacją równoważności w R. Opisać jej klasy równoważności i narysować odpowiadający jej podzbiór $S \subset R \times R$. Znaleźć funkcję $f : R \to R$, której poziomice są klasami równoważności: $x \sim y \iff (x - y)(1 - xy) = 0$; $x \sim y \iff (x = y$ lub $x = -y \in [-1, 1]$ lub $|x| + |y| = 1)$; (c) $x \sim y \iff (x = y$ lub $\exists n \in \mathbb{Z} : x, y \in [2n - 1, 2n])$; (d) $x \sim y \iff (x - y \in \mathbb{Z}$ lub $x + y + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z})$.

17. Niech $I \subset \mathbb{R}$ będzie symetrycznym względem 0 przedziałem, a $X := \mathbb{R}\times I$. Sprawdzić, że relacja $(x,y) \sim (x',y') \iff [x'-x \in \mathbb{Z}, y' = (-1)^{x'-x}y]$ jest równoważnością w X. Zbiór $X/_\sim$ nazywa się *wstęgą Möbiusa* – dlaczego ?

18. Niech R będzie dowolną relacją w zbiorze $\{-1,0,1\}$. Określmy funkcję $d_R : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ wzorem: $d(x,y) := \begin{cases} \|x-y\|, & \text{gdy } (\mathrm{sgn} x_1, \mathrm{sgn} y_1) \in R \\ \|x\|+\|y\| & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$, gdzie $\|x\| := \sqrt{x_1^2+x_2^2}$ dla $x \in \mathbb{R}^2$. Wykazać, że: (a) $[d_R(x,y) = 0 \iff x = y] \iff R$ jest zwrotna; (b) $[d_R$ jest symetryczna, tzn. $d_R(x,y) = d_R(y,x)\ \forall x,y \in \mathbb{R}^2] \iff R$ jest symetryczna; (c) d_R spełnia nierówność trójkąta $\iff R$ jest przechodnia. Zatem: d_R jest metryką w $\mathbb{R}^2 \iff R$ jest relacją równoważności. (d_R ma nazwę "metryka-rzeka" – dlaczego?).

19. Niech R będzie relacją równoważności w X oraz $X_0 \subset X$. Wykazać, że
(X_0 jest sumą pewnych klas równoważności R) $\iff (\forall x,y \in X : [x \in X_0, (x,y) \in R] \Rightarrow y \in X_0)$.

20. Dane są odwzorowania $\alpha : X \longrightarrow Y$, $\beta : Y \longrightarrow Z$, $\gamma : Z \longrightarrow W$. Wykazać, że:
$[\beta\cdot\alpha$ injektywne $] \Rightarrow \alpha$ injektywne; $[\beta\cdot\alpha$ surjektywne $] \Rightarrow \beta$ surjektywne; $[\beta\cdot\alpha$ i $\gamma\cdot\beta$ są bijekcjami $] \Rightarrow \alpha,\beta$ i γ również są bijekcjami.

21. Niech $\alpha : X \longrightarrow Y$, $\beta : Y \longrightarrow X$, $\gamma : X \longrightarrow X$. Wykazać, że:
α jest injektywne $\iff \forall A \subset X : A = f^{-1}(f(A))$; α jest surjektywne $\iff \forall B \subset Y : B = f(f^{-1}(B))$; $[\alpha\cdot\gamma = \alpha,\ \alpha$ injektywne$] \Rightarrow \gamma = \mathrm{id}_X$; $[\gamma\cdot\beta = \beta,\ \beta$ surjektywne $] \Rightarrow \gamma = \mathrm{id}_X$; $[\alpha\cdot\beta$ injektywne, β surjektywne $] \Rightarrow \alpha$ injektywne; $[\beta\cdot\alpha$ surjektywne, β injektywne $] \Rightarrow \alpha$ surjektywne; $[\forall x \in X : \exists n \in \mathbb{N} : \underbrace{\gamma\cdot\dots\cdot\gamma}_{n}(x) = x] \Rightarrow \gamma$ jest bijektywne.

22. Opisać poziomice i zbiór wartości odwzorowania: $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, f(n) := E(\frac{2n-1}{3})$; $f :]0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2, f(t) := (t+t^{-1}, t-t^{-1})$; $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, f(z) := az+\overline{z}$, gdzie $a \in \mathbb{C}$ jest ustaloną liczbą, taką że $|a| = 1 \neq -a$; $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(t) := (\frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2})$; $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, f(n) := 2n^2-3n+1$; $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2}-y$.

23. Która z dwu liczb jest większa: $\sqrt[10000]{10001}$, czy $\sqrt[9999]{10000}$? *Wskazówka: nierówność Bernoulliego.*

24. Dowieść, że dla $x,y \in \mathbb{R}$ mamy: $E(x)+y \geqslant 0 \iff x+E(y) \geqslant 0$. Podać przykłady pokazujące, że zastępując tu nierówności $\geqslant$ nierównościami $>$ lub $\leqslant$ otrzymamy zdania fałszywe. Dowieść, że $y \geqslant E(x) \iff E(y) > x-1$.

25. Niech $E(x) :=$ (maksymalna liczba całkowita $\leqslant x$). Narysować wykresy funkcji $\mathbb{R} \ni x \mapsto E(x) \in \mathbb{R}$ oraz $\mathbb{R} \ni x \mapsto E(x)-3E(\frac{x}{3}) \in \mathbb{R}$. Wyprowadzić wzory: (a) $0 \leqslant E(x+y)-E(x)-E(y) \leqslant 1$; (b) $E(\frac{1}{n}E(nx)) = E(x)$ dla $n \in \mathbb{N}$; (c) $\sum_{k=0}^{n-1} E(x+\frac{k}{n}) = E(nx)$; (d) $\sum_{n=1}^{N} E(\frac{x}{2^n}+\frac{1}{2}) = E(x)$, jeśli liczba $N \in \mathbb{N}$ jest dostatecznie duża.

26. Wykazać, że dla $m,n \in \mathbb{N}$: (a) jeśli $m < n$, to $\sqrt[m+1]{n+1} < \sqrt[m]{n}$; (b) jeśli $m \geqslant n(n-1)$, to $\sqrt[m+1]{n+1} > \sqrt[m]{n}$.
Wskazówka: nierówność Bernoulliego.

27. Wykazać, że: $\frac{2n}{2n-1} \leqslant \sqrt[n]{2} \leqslant \frac{n+1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$ (*nierówność Bernoulliego*); (b) $2^n > n^{50}$ dla $n \geqslant 450$.

28. Wykazać, że: $|x| < 1, |y| < 1 \Rightarrow |\frac{x-y}{1-xy}| < 1$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n} < \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{\sqrt{4n+1}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n} < \frac{3}{4}$, $n \in \mathbb{N}$; $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

29. W n kolejnych latach wskaźnik inflacji przyjmował wartości $x_1,\ldots,x_n$, tzn. w k-tym roku ceny rosły $(1+x_k)$-krotnie. Napisać wzór na średni roczny wskaźnik inflacji za badany okres; wykazać, że jego wartość zawiera się pomiędzy średnią geometryczną a średnią arytmetyczną liczb $x_1,\ldots,x_n$.

30. Wykazać, że $R = \mathbb{Q}_+$ jest jedynym podzbiorem R zbioru $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q}\setminus\{0\}$, spełniającym następujące warunki: (1) $R \cup (-R) = \mathbb{Q}^*$; (2) $R \cap (-R) = \emptyset$; (3) $R\cdot R \subset R$; (4) $R+R \subset R$.

31. Wykazać, że jeżeli zbiór $S \subset \mathbb{R}$ jest przeliczalny lub skończony, to $\exists a,b \in \mathbb{R}, a > 0 : \forall n \in \mathbb{Z} : an+b \notin S$

32. Wykazać, że jeżeli zbiór $S \subset \mathbb{R}^2$ jest przeliczalny lub skończony, to istnieje trójkąt równoboczny na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, o bokach długości 1, którego środkiem ciężkości jest punkt $(0,0)$ i którego brzeg nie zawiera żadnego punktu z S.