Zadania domowe z Analizy IR. Seria 1. 12.10.2014

Zadania oznaczone ★ *uważam za ważniejsze. (KG)*

1. ★ Wyznaczyć i narysować zbiory
$$P=\bigcup_{t\in[0,1]} A_t,\quad Q=\bigcap_{t\in[0,1]} A_t \qquad \text{dla}\quad A_t=[t,2t+1]\times[-t,t+1]$$

2. Niech $n\in\mathbb{N}$. Wykazać, że jeśli $a_1<a_2<\dots<a_n$, $b_1<b_2<\dots<b_n$, oraz ciąg $(b_1',\dots,b_n')$ różni się od ciągu $(b_1,\dots,b_n)$ jedynie kolejnością, to $\sum_{k=1}^n a_k b_k>\sum_{k=1}^n a_k b_k'$.

3. Niech (x_n) będzie ciągiem określonym następującymi warunkami: $x_1=0$, $x_{n+1}=\frac{5}{4-x_n}$. Wykazać (na przykład indukcyjnie), że
$$\forall n\in\mathbb{N}\ \ x_{2n}=\frac{5-x_n^2}{4-2x_n}.$$

4. ★ Dowieść, że liczby Fibonacciego, zdefiniowane rekurencją $F_0=F_1=1$, $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$ mogą być otrzymane ze wzoru
$$F_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}.$$
Należy pamietać, że $\binom{n-k}{k}=0$ zawsze jeśli $n-k<k$. Z definicji, dla $m>k$ $\binom{m}{k}=\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$.

5. Ile jest podzbiorów $P\subset\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ spełniających warunek
$$\forall k,l\in P\ \ |k-l|>1 \text{ lub } k=l.$$

6. ★ Niech R i Q będą relacjami równoważności w zbiorze X. Czy $R\cup Q$, $R\cap Q$ są relacjami równoważności?

7. ★ Niech r będzie relacją z A do B i q relacją z B do C. Definiujemy złożenie $q\circ r$ tych relacji jako relację z A do C daną następującym warunkiem: $a\in A$ *jest w relacji* $q\circ r$ *z* $c\in C$ *wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje* $b\in B$ *takie, e* a *jest w relacji* r *z* b *i* b *jest w relacji* q *z* c. Czy złożenie relacji równoważności jest relacją równoważności?

8. ★ Wykazać, że $n!\leqslant(\frac{n+1}{2})^n$ dla $n\in\mathbb{N}$.

9. Dla jakich $n\in\mathbb{N}$ zachodzą nierówności: $2n+1<2^n$; $3n^3+1<2^n$; $n!<2^{\frac{n(n-1)}{2}}$; $(2n-1)!!\leqslant 2^{n-2}n!$?

10. Niech $a_1,a_2\dots,a_{100}\in\mathbb{R}$ — dane liczby, $s:=|a_1+a_2+\ldots+a_{100}|$. Dowieść, że istnieje permutacja $b_1,b_2,\dots,b_{100}$ liczb $a_1,\dots,a_{100}$, taka że $|b_1|\geqslant\frac{1}{100}s$, $|b_1+b_2|\geqslant\frac{2}{100}s, |b_1+b_2+b_3|\geqslant\frac{3}{100}s,\dots,|b_1+b_2+\ldots+b_{99}|\geqslant\frac{99}{100}s$.

11. Uprościć warunek:
(a) $A\cup B\subset A\cup(B\cap C)$; (b) $(A\cap B)\cup(C\cap B)=B$; (c) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup B$;
(d) $(A\cup B)\setminus(B\cap C)=A\cap C$; (e) $(A\cup B\cup C)\setminus(A\cup B)=C$; (f) $A\setminus B=B\setminus A$; (g) $A\cap B=(A\cup C)\cap(B\setminus C)$.

12. ★ Wykazać, że dla dowolnych zbiorów A, B, C, D zachodzą równości:
(a) $(A\setminus B)\cup C=[(A\cup C)\setminus B]\cup(B\cap C)$; (b) $(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\cup D)$;
(c) $A\setminus(B\cup C\cup D)=((A\setminus B)\setminus C)\setminus D$; (d) $A\setminus[B\setminus(C\setminus D)]=(A\setminus B)\cup(A\cap C\setminus D)$.

13. Niech $A\div B:=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$(*różnica symetryczna* zbiorów). Wykazać, że: działanie $\div$ jest przemienne i łączne; $(A\div B)\cap C=(A\cap C)\div(B\cap C)$; $A\div A=\emptyset$; $A\div\emptyset=A$; $A_1\div A_2\div\dots\div A_n=\{x\in X:\ x$ należy do nieparzystej liczby zbiorów $A_1,\dots,A_n\}$. Wyrazić sumę i różnicę mnogościową zbiorów poprzez operacje $\cap$ i $\div$.

14. Wykazać, że odwzorowanie $f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}_+\longrightarrow\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$, $f(x,y):=(x+y,\frac{1}{x}-\frac{1}{y})$, jest bijektywne, wyliczyć f^{-1}.

15. ($\bigstar$ - wybrane) Wyliczyć:
(a) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{n},\frac{4}{n}\right]$; (b) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left]\frac{n}{n+1},\frac{5}{n}+\frac{n}{10}\right[$; (c) $\bigcup_{r\in\mathbb{R}}\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:\ (x_1-r)^2+(x_2+2r)^2\leqslant r^2+1\}$;
(d) $\bigcap_{n=1}^{\infty}\left([0,n]\cup[n^2,\infty[,\right)$; (e) $\bigcup_{t\in[2,3]}A_t$ oraz $\bigcap_{t\in[2,3]}A_t$, gdzie $A_t:=[t,2t]\times[-t,t]$;
(f) $\bigcup_{n=1}^{\infty}\left]\frac{n}{(n+1)^2},\frac{1}{n+1}\right[$; (g) $\bigcap_n A_n$, $\liminf A_n:=\bigcup_n\bigcap_{k\geqslant n}A_k$, $\limsup A_n:=\bigcap_n\bigcup_{k\geqslant n}A_k$ i $\bigcup_n A_n$, jeśli $A_n:=\left[\frac{n(-1)^n}{n+1},\frac{2n}{n+1}\right]$ dla $n\in\mathbb{N}$.

16. Niech $A_n\subset X,\ \ A'_n:=X\setminus A_n$. Wykazać, że $(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\cap\bigcap_{n=1}^{\infty}(\bigcup_{k<n}A_k\cup\bigcup_{k\geqslant n}A'_k)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_n\setminus A_{n+1})$.

17. Obliczyć $\bigcap_n A_n$, $\liminf A_n:=\bigcup_n\bigcap_{k\geqslant n}A_k$, $\limsup A_n:=\bigcap_n\bigcup_{k\geqslant n}A_k$ i $\bigcup_n A_n$, jeśli $A_n:=\left[\frac{1}{n}+Q(\frac{n}{3}),\frac{3n+1}{2n-1}\right]$ dla $n\in\mathbb{N}$, gdzie $Q(x):=x-E(x)$.

18. Dla $s\geqslant 0$ oznaczmy $K_s:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+(y-s)^2\leqslant s\}$. Wykazać, że mają miejsce następujące zawierania: $\{(x,y): y\geqslant x^2\}\subset\bigcup_{s\in\mathbb{N}}K_s\subset\bigcup_{s\in]0,\infty[}K_s=\ \{(x,y): y\geqslant x^2-\frac{1}{4}\}$.

19. Określmy następujące podzbiory $\mathbb{R}^3$: $S:=\{(x,y,z):\ (x^2+y^2>0,\ z=\frac{2xy}{x^2+y^2})$ lub $(x=y=0,\ |z|\leqslant 1)\}$, $S_1:=\{(x,y,z):\ |z|\leqslant 1,\ y=\frac{z}{1+\sqrt{1-z^2}}x\}$, $S_2:=\{(x,y,z):\ |z|\leqslant 1,\ x=\frac{z}{1+\sqrt{1-z^2}}y\}$. Dowieść, że $S=S_1\cup S_2$ oraz wyznaczyć $S_1\cap S_2$.

20. $\bigstar$ Niech X będzie zbiorem nieprzeliczalnym, a $f: X\longrightarrow]0,\infty[$ — dowolną funkcją. Wykazać, że istnieje $n\in N$ oraz parami różne elementy $x_1,\ldots,x_n\in X$, takie że $f(x_1)+\ldots+f(x_n)>100$.

21. $\bigstar$ Wykazać, że $\bigcap(A_n\cup B_n)\supset(\bigcap A_n)\cup(\bigcap B_n)$. Znaleźć przykład, gdy nie ma równości. Pokazać, że w przypadku, gdy oba ciągi są *zstępujące* (tzn. $\forall n\in\mathbb{N}:\ \ A_{n+1}\subset A_n,\ B_{n+1}\subset B_n$), powyższa inkluzja przechodzi w równość.

22. Niech $\emptyset\neq X$ będzie zbiorem skończonym oraz $f: X\to X$. Wykazać, że:
(a) $R:=\{(x,y)\in X\times X:\ \exists k,l\in N: f^k(x)=f^l(y)\}$ jest relacją równoważności w X;
(b) zbiór $X_0:=\bigcap_{k\in N}f^k(X)$ jest niepusty, $f(X_0)=X_0$ oraz $f|_{X_0}: X_0\to X_0$ jest bijekcją;
(c) każda orbita $f|_{X_0}$ zawiera się w jednej z klas relacji R i każda z klas relacji R zawiera dokładnie jedną orbitę. Zatem $|X/R|$ jest liczbą cykli permutacji $f|_{X_0}$.

23. $\bigstar$ Sprawdzić, że dana relacja jest relacją równoważności w R. Opisać jej klasy równoważności i narysować odpowiadający jej podzbiór $S\subset R\times R$. Znaleźć funkcję $f: R\to R$, której poziomice są klasami równoważności:
(a) $x\sim y\iff(x-y)(1-xy)=0$; (b) $x\sim y\iff(x=y$ lub $x=-y\in[-1,1]$ lub $|x|+|y|=1)$;
(c) $x\sim y\iff(x=y$ lub $\exists n\in\mathbb{Z}: x,y\in[2n-1,2n])$; (d) $x\sim y\iff(x-y\in\mathbb{Z}$ lub $x+y+\frac{1}{2}\in\mathbb{Z})$.

24. Niech $I\subset\mathbb{R}$ będzie symetrycznym względem 0 przedziałem, a $X:=\mathbb{R}\times I$. Sprawdzić, że relacja $(x,y)\sim(x',y')$ $\iff[x'-x\in\mathbb{Z}, y'=(-1)^{x'-x}y]$ jest równoważnością w X. Zbiór $X/_{\sim}$ nazywa się *wstęgą Möbiusa* – dlaczego ?

25. Niech R będzie dowolną relacją w zbiorze $\{-1,0,1\}$. Określmy funkcję $d_R:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ wzorem:
$d(x,y):=\begin{cases}\|x-y\|, & \text{gdy } (\mathrm{sgn}x_1\,,\mathrm{sgn}y_1)\in R\\ \|x\|+\|y\| & \text{w przeciwnym przypadku}\end{cases}$, gdzie $\|x\|:=\sqrt{x_1^2+x_2^2}$ dla $x\in\mathbb{R}^2$.
Wykazać, że: (a) $[d_R(x,y)=0\iff x=y]\iff R$ jest zwrotna; (b) $[d_R$ jest symetryczna, tzn. $d_R(x,y)=d_R(y,x)\ \forall x,y\in\mathbb{R}^2]\iff R$ jest symetryczna; (c) d_R spełnia nierówność trójkąta $\iff R$ jest przechodnia. Zatem: d_R jest metryką w $\mathbb{R}^2\iff R$ jest relacją równoważności. (d_R ma nazwę "metryka-rzeka" – dlaczego?).

26. $\bigstar$ Niech R będzie relacją równoważności w X oraz $X_0\subset X$. Wykazać, że
(X_0 jest sumą pewnych klas równoważności R) $\iff(\forall x,y\in X:[x\in X_0,(x,y)\in R]\Rightarrow y\in X_0)$.

27. $\bigstar$ Dane są odwzorowania $\alpha: X\longrightarrow Y,\ \beta: Y\longrightarrow Z,\ \gamma: Z\longrightarrow W$. Wykazać, że:
$[\beta\cdot\alpha$ injektywne $]\Rightarrow\alpha$ injektywne; $[\beta\cdot\alpha$ surjektywne $]\Rightarrow\beta$ surjektywne; $[\beta\cdot\alpha$ i $\gamma\cdot\beta$ są bijekcjami $]\Rightarrow\alpha,\beta$ i γ również są bijekcjami.

28. $\bigstar$ Niech $\alpha: X\longrightarrow Y,\ \beta: Y\longrightarrow X,\ \gamma: X\longrightarrow X$. Wykazać, że:
α jest injektywne $\iff\forall A\subset X: A=f^{-1}(f(A))$; α jest surjektywne $\iff\forall B\subset Y: B=f(f^{-1}(B))$; $[\alpha\cdot\gamma=\alpha,\ \alpha$ injektywne$]\Rightarrow\ \gamma=\mathrm{id}_X$; $[\gamma\cdot\beta=\beta,\ \beta$ surjektywne $]\Rightarrow\ \gamma=\mathrm{id}_X$; $[\alpha\cdot\beta$ injektywne, β surjektywne $]\Rightarrow\ \alpha$ injektywne; $[\beta\cdot\alpha$ surjektywne, β injektywne $]\Rightarrow\ \alpha$ surjektywne; $[\forall x\in X:\exists n\in\mathbb{N}: \underbrace{\gamma\cdot\dots\cdot\gamma}_{n}(x)=x]\ \Rightarrow\ \gamma$ jest bijektywne.

29. Opisać poziomice i zbiór wartości odwzorowania: $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, f(n) := E(\frac{2n-1}{3})$; $f :]0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}^2, f(t) := (t + t^{-1}, t - t^{-1})$; $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, f(z) := az + \overline{z}$, gdzie $a \in \mathbb{C}$ jest ustaloną liczbą, taką że $|a| = 1 \neq -a$; $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2, f(t) := (\frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2})$; $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}, f(n) := 2n^2 - 3n + 1$; $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2} - y$.

30. Która z dwu liczb jest większa: $\sqrt[10000]{10001}$, czy $\sqrt[9999]{10000}$? *Wskazówka: nierówność Bernoulliego.*

31. Dowieść, że dla $x, y \in \mathbb{R}$ mamy: $E(x)+y \geqslant 0 \iff x+E(y) \geqslant 0$. Podać przykłady pokazujące, że zastępując tu nierówności $\geqslant$ nierównościami $>$ lub $\leqslant$ otrzymamy zdania fałszywe. Dowieść, że $y \geqslant E(x) \iff E(y) > x - 1$.

32. Niech $E(x) :=$ (maksymalna liczba całkowita $\leqslant x$). Narysować wykresy funkcji $\mathbb{R} \ni x \mapsto E(x) \in \mathbb{R}$ oraz $\mathbb{R} \ni x \mapsto E(x) - 3E(\frac{x}{3}) \in \mathbb{R}$. Wyprowadzić wzory: (a) $0 \leqslant E(x+y) - E(x) - E(y) \leqslant 1$; (b) $E(\frac{1}{n}E(nx)) = E(x)$ dla $n \in \mathbb{N}$; (c) $\sum_{k=0}^{n-1} E(x + \frac{k}{n}) = E(nx)$; (d) $\sum_{n=1}^{N} E(\frac{x}{2^n} + \frac{1}{2}) = E(x)$, jeśli liczba $N \in \mathbb{N}$ jest dostatecznie duża.

33. Wykazać, że dla $m, n \in \mathbb{N}$: (a) jeśli $m < n$, to $\sqrt[m+1]{n+1} < \sqrt[m]{n}$; (b) jeśli $m \geqslant n(n-1)$, to $\sqrt[m+1]{n+1} > \sqrt[m]{n}$. *Wskazówka: nierówność Bernoulliego.*

34. Wykazać, że: $\frac{2n}{2n-1} \leqslant \sqrt[n]{2} \leqslant \frac{n+1}{n}$ dla $n \in \mathbb{N}$ (*nierówność Bernoulliego*); (b) $2^n > n^{50}$ dla $n \geqslant 450$.

35. Wykazać, że: $|x| < 1, |y| < 1 \Rightarrow |\frac{x-y}{1-xy}| < 1$; $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{\sqrt{4n+1}} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ dla $n \in \mathbb{N}$; $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} < \frac{3}{4}, n \in \mathbb{N}$; $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$.

36. ★ W n kolejnych latach wskaźnik inflacji przyjmował wartości $x_1, \ldots, x_n$, tzn. w k-tym roku ceny rosły $(1 + x_k)$- krotnie. Napisać wzór na średni roczny wskaźnik inflacji za badany okres; wykazać, że jego wartość zawiera się pomiędzy średnią geometryczną a średnią arytmetyczną liczb $x_1, \ldots, x_n$.

37. Wykazać, że $R = \mathbb{Q}_+$ jest jedynym podzbiorem R zbioru $\mathbb{Q}^* := \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, spelniającym następujące warunki: (1) $R \cup (-R) = \mathbb{Q}^*$; (2) $R \cap (-R) = \emptyset$; (3) $R \cdot R \subset R$; (4) $R + R \subset R$.

38. Wykazać, że jeżeli zbiór $S \subset \mathbb{R}$ jest przeliczalny lub skończony, to $\exists a, b \in \mathbb{R},\ a > 0 : \forall n \in \mathbb{Z} : an + b \notin S$

39. ★ Wykazać, że jeżeli zbiór $S \subset \mathbb{R}^2$ jest przeliczalny lub skończony, to istnieje trójkąt równoboczny na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$, o bokach długości 1, którego środkiem ciężkości jest punkt $(0, 0)$ i którego brzeg nie zawiera żadnego punktu z S.

40. ★ Wykazać, że: (a) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[100]{n^{100} + n^{99}} - n) = \frac{1}{100}$; (b) $\lim_{n\to\infty}\left(n + 4\sqrt{n^2+n} - 2\sqrt{n^2-n} - 3\sqrt{n^2+2n}\right) = \frac{5}{4}$; (c) $\lim_{n\to\infty} n(2\sqrt{n^2-n+2} - 3\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2n}) = -\frac{1}{4}$; (d) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n^3 + \sqrt{n^5}}} - \sqrt{n^2 + \sqrt{n^3}}\right) = \frac{1}{4}$; (e) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{(n+2)(n+4)(n+5)} - \sqrt[3]{n(n+1)(n+3)}\right) = \frac{7}{3}$; (f) $\lim_{\to\infty} n^2\left[\left(1 + \frac{p}{n}\right)^q - \left(1 + \frac{q}{n}\right)^p\right] = \frac{1}{2}pq(q-p)$ dla $p, q \in N$; (g) $\lim_{\to\infty}\left(\sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}\right) = 1$; (h) $\lim_{\to\infty} \sqrt[n]{5a^{2n} + 4a^n + 3} = \max\{1, a^2\}$ dla $a \in R$; (i) $\lim_{\to\infty}(n^7 + 7)^{-7}\sqrt{(n+2)^{100} - n^{100} - 200n^{99}} = 30\sqrt{22}$; (j) $\lim_{\to\infty} \sqrt[n]{(3+x)^n + (1-x)^n} = 2 + |1+x|$ dla $x \in \mathbb{R}$; (k) $\lim_{\to\infty} \frac{p_1 a_1^{n+1} + \ldots + p_r a_r^{n+1}}{p_1 a_1^n + \ldots + p_r a_r^n} = \max\{a_1, \ldots, a_r\}$ oraz $\lim_{\to\infty} \sqrt[n]{p_1 a_1^n + \ldots + p_r a_r^n} = \max\{a_1, \ldots, a_r\}$, jeśli $r \in \mathbb{N}$ i liczby p_i, a_i są dodatnie; (l) $\lim_{\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1} - \frac{2}{\sqrt[n]{4}-1}\right) = \frac{1}{2}$;
(m) $\lim_{\to\infty} 2^{-n}(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n}) \cdots (1 + \frac{n}{n}) = 0$; (n) $\lim_{\to\infty} \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{n})(1 + \frac{2}{n}) \cdots (1 + \frac{n}{n}) = +\infty$;
(o) $\lim_{\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n+2} \cdots \frac{n}{3n} = 0$; (p) $\lim_{\to\infty} n[(n+1)^{\frac{1}{100}} - n^{\frac{1}{100}}] = +\infty$;
(q) $\lim_{\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2-n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 2$;
(r) $\lim_{\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^3+1} + \frac{n^2+2}{n^3+2} + \ldots + \frac{n^2+n}{n^3+n}\right) = 1$; (s) $\lim_{\to\infty} \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \ldots \cdot \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}$; (t) $\lim_{\to\infty} \sqrt[n]{1^4 + 2^4 + \ldots + n^4} = 1$; (u) $\lim_{\to\infty} \frac{n+2}{n^2-3} \sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{k^2 - 2} = 1$.

41. Wykazać, że jeśli ciąg liczbowy (a_n) jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty} \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \ldots + a_n}{n + (n-1) + \ldots + 1} = \lim_{n\to\infty} a_n$.

42. Wykazać, że jeśli ciąg liczbowy (a_n) jest ograniczony, to ciąg (x_n) o wyrazach $x_n =: \frac{2^{n-1}a_1 + \ldots + 2a_{n-1} + a_n}{2^{n-1} + \ldots + 2 + 1}$ jest zbieżny. Wyliczyć $\lim x_n$, jeśli $a_n = \alpha^n$, $|\alpha| < 2$. *Wskazówka:* $\tilde{x}_n := (1 - 2^{-n})x_n$ *spełnia warunek Cauchy'ego.*

43. Dowieść, że jeśli ciąg $(a_1 + \ldots + a_n)$ jest ograniczony oraz $a_n \searrow 0$ przy $n \to \infty$, to $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

44. ★ Sprawdzić, korzystając z twierdzenia Stolza:
(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^5+2^5+\ldots+n^5}{n^6} = \frac{1}{6}$; (b) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1^5+2^5+\ldots+n^5}{n^5} - \frac{n}{6}\right) = \frac{1}{2}$;
(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = 2(\sqrt{2}-1)$; (d) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\ldots+\sqrt{n(n+1)}}{n} - \frac{n}{2}\right) = 1$;
(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}) = 2$; (f) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n}} = \frac{2}{3}$;
(g) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n} = \frac{2}{e}$; (h) $\lim_{n\to\infty} \frac{n(2n-1)}{\sqrt[n]{(2n)!}} = \frac{e^2}{2}$.

45. Dla danych liczb dodatnich a i b określmy rekurencyjnie dwa ciągi (a_n) i (b_n), przyjmując: $a_0 := a$, $b_0 := b$, $a_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} := \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$. Wykazać, że ciągi $(a_n), (b_n)$ są zbieżne oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{ab} = \lim_{n\to\infty} b_n$.

46. Wykazać zbieżność ciągu (a_n), jeśli:
(a) $a_n := (1+\frac{1}{1^2})(1+\frac{1}{2^2})\cdots(1+\frac{1}{n^2})$; (b) $a_n := 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}} - \sqrt{2n}$; (c) $a_n := 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$ (liczba $\lim a_n \approx 0.57721566$ nazywa się *stałą Eulera*); (d) $a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\sqrt{n+1}$.

47. ★ Zbadać zbieżność ciągów określonych rekurencyjnie :
(a) $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}x_n^2 - \frac{1}{3}x_n^3$, $x_0 = 1$; (b) $x_{n+1} = \frac{\pi}{2}\sin x_n$ $x_0 = 1$; (c) $x_{n+1} = x_n - \sin x_n$, $x_0 = 1$.

48. Dla podanych niżej ciągów obliczyć $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\liminf x_n$, $\limsup x_n$
(a) $x_n = \frac{n-10}{n^2}$, (b) $x_n = \frac{n^2-3n}{5n^2-24n+36}$, (c) $x_n = \frac{n-E(\sqrt{n})^2+1}{E(\sqrt{n})}$, (d) $x_n = n - 10[\frac{n}{10}] + \frac{2}{n}$; (e) $x_n = n - \frac{5}{n} - 5E(\frac{n}{5})$; (f) $x_n = \frac{24}{n} + \frac{n}{10} - [\frac{n}{10}]$;

49. Dowieść (nie stosując twierdzenia Stolza), że $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}) = 0$.

50. ★ Zbadać ograniczoność i wyznaczyć kresy zbioru:
(a) $\{\sqrt[n]{n+100} : n \in \mathbb{N}\}$; (b) $\{\frac{x}{x^2+1} : x \in \mathbb{R}\}$; (c) $\{2^x + 2^{1-x} : x \in \mathbb{R}\}$; (d) $\{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$; (e) $\{\frac{1000^n}{n!} : n \in \mathbb{N}\}$; (f) $\{\sqrt{n} - E(\sqrt{n-1}) : n \in \mathbb{N}\}$; (g) $\{\frac{m}{n(m+n)} : m, n \in \mathbb{N}\}$; (h) $\{\frac{1}{\sqrt[m]{n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m}} : m, n \in \mathbb{N}\}$.

51. Niech Z – dowolny zbiór niepusty, $P := \{A \in 2^Z \ : \ A : \text{skończony}\}$. Wykazać, że wzór $d(A,B) := |A \div B| := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ określa metrykę w zbiorze P. Opisać kule i odcinki względem tej metryki.

52. ★ Sprawdzić, że wzór $d(x,y) := min\{|x-y|, 3-|x|-|y|\}$ zadaje metrykę na zbiorze $X := [-1,1]$. Dla wartości $r = \frac{4}{5}$ i $r = \frac{5}{4}$ wyznaczyć kulę $K(1;r)$ (względem metryki d). Wykazać, że (średnica (X,d)) $:= \sup_{x,y\in X} d(x,y) = \frac{3}{2}$.

53. Sprawdzić, że wzór $d(x,y) := |(|x|-|y|)| + |\text{sgn}x - \text{sgn}y|$ określa metrykę na $\mathbb{R}$. Wyznaczyć kule (względem d) o środku $x_0 = 4$ i promieniach $r = 3,4,5,6$. Pokazać, że $K(4;r)$ jest przedziałem $\iff$ $0 < r \leqslant 2$ lub $r \geqslant 6$.

54. Dla jakich wartości $a \in \mathbb{R}$ funkcja $d(x,y) := \begin{cases} |x-y|, & \text{gdy } x-y \in \mathbb{Q} \\ a, & \text{gdy } x-y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ jest metryką na $[-1,1]$.

55. ★ *Metryka cyklicznego uporządkowania przedziału*: Niech $X := [a,b[\subset \mathbb{R}$ oraz $h := b-a$ (lub $X := \overline{1,n} \subset \mathbb{Z}$ oraz $h := n$); sprawdzić, że wzór $d(x,y) := \min(|x-y|, h-|x-y|)$ określa metrykę w zbiorze X.

56. Wykazać, że funkcja $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadaje *pseudometrykę* na $\mathbb{R}$ (tzn. spełnia warunki $d(x,x) = 0, d(x,y) = d(y,x), d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$); opisać określoną przez d relację równoważności w $\mathbb{R}$: $x \sim y \iff d(x,y) = 0$.
$d(x,y) := |\sin x - \sin y| + |\cos x - \cos y|$; $d(x,y) := |\sin x - \sin y| + |\sin(x-y)|$.

57. ★ Czy wzór $d(x,y) := \frac{|x-y|}{1+(x-y)^2}$ określa metrykę na $\mathbb{R}$?

58. ★ Dowieść, że: zbiór wyrazów ciągu Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej jest ograniczony;

59. ★ Dowieść, że jeśli (x_n) i (y_n) są dwoma ciągami Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej (X,d), to ciąg liczbowy $(d(x_n,y_n))$ jest zbieżny.

60. ★ Niech $X := K(0,1) = \{x \in \mathbb{C} : |x| < 1\}$ oraz $d(x,y) := min\{|x-y|\,, 2-|x|-|y|\}$. Sprawdzić, że (X,d) jest przestrzenią metryczną niezupełną (tzn istnieją ciągi Cauchy'ego nie mające w X granicy). Narysować K(p,R) (kula o środku p i promieniu R) dla (p;R) równych odpowiednio: $((0,0)\,;\,\frac{1}{2})$; $((0,\frac{3}{4})\,;\,\frac{1}{2})$.