Zadania domowe z Analizy IR. Seria 2. 4.11.2013

1. Niech Z – dowolny zbiór niepusty, $P := \{A \in 2^Z \; : \; A : \text{skończony} \}$. Wykazać, że wzór $d(A,B) := |A \div B| := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ określa metrykę w zbiorze P. Opisać kule i odcinki względem tej metryki.

2. Sprawdzić, że wzór $d(x,y) := min\{|x-y|, 3-|x|-|y|\}$ zadaje metrykę na zbiorze $X := [-1,1]$. Dla wartości $r = \frac{4}{5}$ i $r = \frac{5}{4}$ wyznaczyć kulę $K(1;r)$ (względem metryki d). Wykazać, że (średnica (X,d)) $:= \sup_{x,y \in X} d(x,y) = \frac{3}{2}$.

3. Sprawdzić, że wzór $d(x,y) := |(|x|-|y|)| + |\mathrm{sgn} x - \mathrm{sgn} y|$ określa metrykę na $\mathbb{R}$. Wyznaczyć kule (względem d) o środku $x_0 = 4$ i promieniach $r = 3,4,5,6$. Pokazać, że $K(4;r)$ jest przedziałem $\iff$ $0 < r \leq 2$ lub $r \geq 6$.

4. Dla jakich wartości $a \in \mathbb{R}$ funkcja $d(x,y) := \begin{cases} |x-y|, & \text{gdy } x-y \in \mathbb{Q} \\ a, & \text{gdy } x-y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ jest metryką na $[-1,1]$.

5. *Metryka cyklicznego uporządkowania przedziału*: Niech $X := [a,b[\subset \mathbb{R}$ oraz $h := b-a$ (lub $X := \overline{1,n} \subset \mathbb{Z}$ oraz $h := n$); sprawdzić, że wzór $d(x,y) := \min(|x-y|, h-|x-y|)$ określa metrykę w zbiorze X.

6. Wykazać, że funkcja $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ zadaje *pseudometrykę* na $\mathbb{R}$ (tzn. spełnia warunki $d(x,x) = 0, d(x,y) = d(y,x), d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$); opisać określoną przez d relację równoważności w $\mathbb{R}$: $x \sim y \iff d(x,y) = 0$.
$d(x,y) := |\sin x - \sin y| + |\cos x - \cos y|$; $d(x,y) := |\sin x - \sin y| + |\sin(x-y)|$.

7. Czy wzór $d(x,y) := \frac{|x-y|}{1+(x-y)^2}$ określa metrykę na $\mathbb{R}$?

8. Dowieść, że: zbiór wyrazów ciągu Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej jest ograniczony;

9. Dowieść, że jeśli (x_n) i (y_n) są dwoma ciągami Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej (X,d), to ciąg liczbowy $(d(x_n,y_n))$ jest zbieżny.

10. Niech $X := K(0,1) = \{x \in \mathbb{C} \; : |x| < 1\}$ oraz $d(x,y) := min\{|x-y| \, , \, 2-|x|-|y|\}$. Sprawdzić, że (X,d) jest przestrzenią metryczną niezupełną (tzn istnieją ciągi Cauchy'ego nie mające w X granicy). Narysować K(p,R) (kula o środku p i promieniu R) dla (p;R) równych odpowiednio: $((0,0) \, ; \frac{1}{2}) \, ; \, ((0, \frac{3}{4}) \, ; \frac{1}{2})$.

11. Wykazać, że w każdej metryce odcinek o końcach a i b tzn. $\{x \in X \; : d(a,b) = d(a,x) + d(x,b)\}$ jest domknięty.

12. Wykazać, że $S := \{x \in \mathbb{R}^3 \; : x_1 x_2 x_3 = 1\}$ ma cztery spójne składowe.

13. Zbadać zwartość, spójność, domkniętość i ograniczoność zbioru: $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; : x(x+y)^2 = 1\}$.

14. Zbadać domkniętość, otwartość, zwartość i spójność poniższych podzbiorów przestrzeni $X \subset \mathbb{R}$
a) $X := \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, $A := \{1\}$, $B := \{0, 1, \frac{1}{2}\}$, $C :=$dowolny podzbiór X;
b) $X := \mathbb{R}$, $A := \{x \in \mathbb{R} \; : \; \frac{1}{32} \geq x^3 - 2x^2 + x \geq 0\}$;
c) $X :=]0, \frac{1}{2}[$, $A := \{x \in \mathbb{R} \; : \; \frac{1}{32} \geq x^3 - 2x^2 + x \geq 0\}$;
d) $X := \mathbb{R}$, $A := \{x \in \mathbb{R} \; : \; x = a^n \, , \, n \in \mathbb{N}\}$, $a \in \mathbb{R}$–ustalone ;
e) $X := \{x \in \mathbb{R} \; : \; x = a^n \, , \, n \in \mathbb{Z}\}$, $A := \{x \in \mathbb{R} \; : \; x = a^n \, , \, n \in \mathbb{N}\}$, $a \in \mathbb{R}$–ustalone;

15. Niech $X :=]0, \infty[$. Podać przykład funkcji ciągłej $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dla której f(X) jest zbiorem : a) domkniętym i nieograniczonym, b) domkniętym i ograniczonym (czyli zwartym).

16. (C) Opisać otwarte, domknięte, zwarte i spójne podzbiory zbioru $\mathbb{N}$ w topologii zadanej metryką $d(m,n) := |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$. Czy metryka $d_\circ(m,n) := |m-n|$ określa tę samą co d topologię w zbiorze $\mathbb{N}$?

17. (C) Zbadać domkniętość, zwartość, spójność i otwartość zbiorów: a) Zbiór funkcji wielomianowych na odcinku [0,1]. (jako podzbiór $C[0,1]$ z metryką $d(f,g) := sup_{x \in [0,1]} |f(x) - g(x)|$) b) Jak wyżej lecz ograniczamy się do wielomianów stopnia nie większego niż 17.

18. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną; dla $A \subset X$ i $\epsilon \geq 0$ oznaczmy $A_\epsilon := \{x \in X : \exists a \in A : d(x,a) \leq \epsilon\}$. Rozważmy następujące implikacje: (D) A domknięty $\Rightarrow A_\epsilon$ domknięty; (O) A otwarty $\Rightarrow A_\epsilon$ otwarty; (Z) A zwarty $\Rightarrow A_\epsilon$ zwarty; (S) A spójny $\Rightarrow A_\epsilon$ spójny. Dowieść, że: (a) A zwarty $\Rightarrow$ A_ϵ domknięty; (b) w przestrzeni $X := \mathbb{R}^n$ z metryką $d(x,y) := |x-y|$ implikacje (D), (O), (Z) i (S) są również prawdziwe;
(c) dla $X :=]-\infty, -1[\cup \{0\} \cup]+1, +\infty[$; z metryką $d(x,y) := |x-y|$ implikacje (D), (O), (Z) i (S) są fałszywe.

19. (C) Wykazać, że przestrzeń metryczna, w której każdy podzbiór ograniczony i domknięty jest zwarty, jest zupełna.

20. Odwzorowanie f nazywa się *domknięte* (*otwarte*), jeżeli f-obrazy zbiorów domkniętych (otwartych) są domknięte (otwarte). Zbadać, czy dane ciągłe (w zwykłej topologii $\mathbb{R}$) odwzorowanie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest domknięte lub otwarte:
$f(x) := \sqrt{1+x^2}$; $f(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;(c) $f(x) := \frac{2x}{1+x^2}$; $f(x) := \sin x$.

21. (C) Wykazać, że nie istnieje ciągła bijekcja odcinka domkniętego na zbiór $W := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,,\, -1 \le x \le 1 \,,\, y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; x = 0 \;\; 0 \le y \le 1\}$.

22. Wykazać, że nie istnieje ciągła bijekcja $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (zatem $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}$ nie są homeomorficzne). Uogólnić wynik na $\mathbb{R}^m$ $m \ge 2$ i $\mathbb{R}$.

23. Czy istnieje ciągła bijekcja okręgu na prostą ?

24. (C) Niech $C(r)$ oznacza okrąg na płaszczyźnie o środku w początku układu współrzędnych i promieniu r. Niech $X := \bigcup_{n=2}^{\infty} C(1-\frac{1}{n})$, $Y := \bigcup_{n=3}^{\infty} C(\frac{1}{n})$ będą podzbiorami w $\mathbb{R}^2$ ze standardową metryką. a) Wykazać, że X i Y są niezupełnymi przestrzeniami metrycznymi. b) Skonstruować homeomorfizm (tzn. ciągłą bijekcję taką, że odwrotna jest ciągła) $X \to Y$. c) Znaleźć uzupełnienia X i Y i wykazać, że nie są homeomorficzne. (Czyli homeomorficzne przestrzenie metryczne mogą mieć niehomeomorficzne uzupełnienia.)

25. Wykazać, że: (a) $\lim_{n\to\infty}(\sqrt[100]{n^{100}+n^{99}}-n) = \frac{1}{100}$; (b) $\lim_{n\to\infty}\left(n+4\sqrt{n^2+n}-2\sqrt{n^2-n}-3\sqrt{n^2+2n}\right) = \frac{5}{4}$; (c) $\lim_{n\to\infty} n(2\sqrt{n^2-n+2}-3\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2+2n}) = -\frac{1}{4}$; (d) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^3+\sqrt{n^5}}}-\sqrt{n^2+\sqrt{n^3}}\right) = \frac{1}{4}$; (e) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{(n+2)(n+4)(n+5)}-\sqrt[3]{n(n+1)(n+3)}\right) = \frac{7}{3}$; (f) $\lim_{\to\infty} n^2\left[\left(1+\frac{p}{n}\right)^q-\left(1+\frac{q}{n}\right)^p\right] = \frac{1}{2}pq(q-p)$ dla $p,q \in N$; (g) $\lim_{\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right) = 1$; (h) $\lim_{\to\infty}\sqrt[n]{5a^{2n}+4a^n+3} = \max\{1,a^2\}$ dla $a \in R$; (i) $\lim_{\to\infty}(n^7+7)^{-7}\sqrt{(n+2)^{100}-n^{100}-200n^{99}} = 30\sqrt{22}$; (j) $\lim_{\to\infty}\sqrt[n]{(3+x)^n+(1-x)^n} = 2+|1+x|$ dla $x \in \mathbb{R}$; (k) $\lim_{\to\infty}\frac{p_1a_1^{n+1}+\ldots+p_ra_r^{n+1}}{p_1a_1^n+\ldots+p_ra_r^n} = \max\{a_1,\ldots,a_r\}$ oraz $\lim_{\to\infty}\sqrt[n]{p_1a_1^n+\ldots+p_ra_r^n} = \max\{a_1,\ldots,a_r\}$, jeśli $r \in \mathbb{N}$ i liczby p_i, a_i są dodatnie; (l) $\lim_{\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}-1}-\frac{2}{\sqrt[n]{4}-1}\right) = \frac{1}{2}$;
(m) $\lim_{\to\infty} 2^{-n}(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n}) = 0$; (n) $\lim_{\to\infty}\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{n}{n}) = +\infty$;
(o) $\lim_{\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n+2}\cdots\frac{n}{3n} = 0$; (p) $\lim_{\to\infty} n[(n+1)^{\frac{1}{100}}-n^{\frac{1}{100}}] = +\infty$;
(q) $\lim_{\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2-n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2-n+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 2$; (r) $\lim_{\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^3+1}+\frac{n^2+2}{n^3+2}+\ldots+\frac{n^2+n}{n^3+n}\right) = 1$; (s) $\lim_{\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{2}{3}$; (t) $\lim_{\to\infty}\sqrt[n]{1^4+2^4+\ldots+n^4} = 1$; (u) $\lim_{\to\infty}\frac{n+2}{n^2-3}\sum_{k=1}^n\sqrt[n]{k^2-2} = 1$.

26. Wykazać, że jeśli ciąg liczbowy (a_n) jest zbieżny, to $\lim_{n\to\infty}\frac{na_1+(n-1)a_2+\ldots+a_n}{n+(n-1)+\ldots+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$.

27. Wykazać, że jeśli ciąg liczbowy (a_n) jest ograniczony, to ciąg (x_n) o wyrazach $x_n =: \frac{2^{n-1}a_1+\ldots+2a_{n-1}+a_n}{2^{n-1}+\ldots+2+1}$ jest zbieżny. Wyliczyć $\lim x_n$, jeśli $a_n = \alpha^n$, $|\alpha| < 2$. *Wskazówka:* $\tilde{x}_n := (1-2^{-n})x_n$ *spełnia warunek Cauchy'ego.*

28. Dowieść, że jeśli ciąg $(a_1+\ldots+a_n)$ jest ograniczony oraz $a_n \searrow 0$ przy $n \to \infty$, to $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

29. Sprawdzić, korzystając z twierdzenia Stolza:
(a) $\lim_{n\to\infty}\frac{1^5+2^5+\ldots+n^5}{n^6} = \frac{1}{6}$; (b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1^5+2^5+\ldots+n^5}{n^5}-\frac{n}{6}\right) = \frac{1}{2}$;
(c) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\frac{1}{\sqrt{n+2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = 2(\sqrt{2}-1)$; (d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\ldots+\sqrt{n(n+1)}}{n}-\frac{n}{2}\right) = 1$;
(e) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}) = 2$; (f) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{(n+1)\sqrt{n}} = \frac{2}{3}$;
(g) $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}{n} = \frac{2}{e}$; (h) $\lim_{n\to\infty}\frac{n(2n-1)}{\sqrt[n]{(2n)!}} = \frac{e^2}{2}$.

30. Dla danych liczb dodatnich a i b określmy rekurencyjnie dwa ciągi (a_n) i (b_n), przyjmując: $a_0 := a$, $b_0 := b$, $a_{n+1} := \frac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1} := \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$. Wykazać, że ciągi $(a_n),(b_n)$ są zbieżne oraz $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{ab} = \lim_{n\to\infty} b_n$.

31. Wykazać zbieżność ciągu (a_n), jeśli:
(a) $a_n := (1+\frac{1}{1^2})(1+\frac{1}{2^2})\cdots(1+\frac{1}{n^2})$; (b) $a_n := 1+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{2n-1}}-\sqrt{2n}$; (c) $a_n := 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n$ (liczba $\lim a_n \approx 0.57721566$ nazywa się *stałą Eulera*); (d) $a_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\sqrt{n+1}$.

32. Zbadać zbieżność ciągów określonych rekurencyjnie :
(a) $x_{n+1} = x_n - \frac{1}{2}x_n^2 - \frac{1}{3}x_n^3$, $x_0 = 1$; (b) $x_{n+1} = \frac{\pi}{2}\sin x_n$ $x_0 = 1$; (c) $x_{n+1} = x_n - \sin x_n$, $x_0 = 1$.

33. Dla podanych niżej ciągów obliczyć $\inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\liminf x_n$, $\limsup x_n$
(a) $x_n = \frac{n-10}{n^2}$, (b) $x_n = \frac{n^2-3n}{5n^2-24n+36}$, (c) $x_n = \frac{n-E(\sqrt{n})^2+1}{E(\sqrt{n})}$, (d) $x_n = n-10[\frac{n}{10}]+\frac{2}{n}$; (e) $x_n = n-\frac{5}{n}-5E(\frac{n}{5})$;
(f) $x_n = \frac{24}{n} + \frac{n}{10} - [\frac{n}{10}]$;

34. Dowieść (nie stosując twierdzenia Stolza), że $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}) = 0$.

35. Zbadać ograniczoność i wyznaczyć kresy zbioru:
(a) $\{\sqrt[n]{n+100} : n \in \mathbb{N}\}$; (b) $\{\frac{x}{x^2+1} : x \in \mathbb{R}\}$; (c) $\{2^x + 2^{1-x} : x \in \mathbb{R}\}$; (d) $\{\frac{n^2}{2^n} : n \in \mathbb{N}\}$; (e) $\{\frac{1000^n}{n!} : n \in \mathbb{N}\}$;
(f) $\{\sqrt{n} - E(\sqrt{n-1}) : n \in \mathbb{N}\}$; (g) $\{\frac{m}{n(m+n)} : m, n \in \mathbb{N}\}$; (h) $\{\frac{1}{\sqrt[m]{n}} + \frac{1}{\sqrt[n]{m}} :\ m, n \in \mathbb{N}\}$.