Zadania domowe z Analizy IR. Seria 2. 7.11.2014

1. Wykazać, że w każdej metryce odcinek o końcach a i b tzn. $\{x \in X : d(a,b) = d(a,x) + d(x,b)\}$ jest domknięty.
2. Wykazać, że $S := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 x_3 = 1\}$ ma cztery spójne składowe.
3. Zbadać zwartość, spójność, domkniętość i ograniczoność zbioru: $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x(x+y)^2 = 1\}$.
4. Zbadać domkniętość, otwartość, zwartość i spójność poniższych podzbiorów przestrzeni $X \subset \mathbb{R}$
   a) $X := \{0\} \cup \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$, $A := \{1\}$, $B := \{0, 1, \frac{1}{2}\}$, $C :=$dowolny podzbiór X;
   b) $X := \mathbb{R}$, $A := \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{32} \geq x^3 - 2x^2 + x \geq 0\}$;
   c) $X :=]0, \frac{1}{2}[$, $A := \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{32} \geq x^3 - 2x^2 + x \geq 0\}$;
   d) $X := \mathbb{R}$, $A := \{x \in \mathbb{R} : x = a^n, n \in \mathbb{N}\}$, $a \in \mathbb{R}$–ustalone ;
   e) $X := \{x \in \mathbb{R} : x = a^n, n \in \mathbb{Z}\}$, $A := \{x \in \mathbb{R} : x = a^n, n \in \mathbb{N}\}$, $a \in \mathbb{R}$–ustalone;
5. Niech $X :=]0, \infty[$. Podać przykład funkcji ciągłej $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dla której f(X) jest zbiorem : a) domkniętym i nieograniczonym, b) domkniętym i ograniczonym (czyli zwartym).
6. (C) Opisać otwarte, domknięte, zwarte i spójne podzbiory zbioru $\mathbb{N}$ w topologii zadanej metryką $d(m,n) := |\frac{1}{m} - \frac{1}{n}|$. Czy metryka $d_\circ(m,n) := |m-n|$ określa tę samą co d topologię w zbiorze $\mathbb{N}$?
7. (C) Zbadać domkniętość, zwartość, spójność i otwartość zbiorów: a) Zbiór funkcji wielomianowych na odcinku [0,1]. (jako podzbiór $C[0,1]$ z metryką $d(f,g) := sup_{x\in[0,1]}|f(x) - g(x)|$) b) Jak wyżej lecz ograniczamy się do wielomianów stopnia nie większego niż 17.
8. Niech (X,d) będzie przestrzenią metryczną; dla $A \subset X$ i $\epsilon \geq 0$ oznaczmy $A_\epsilon := \{x \in X : \exists a \in A : d(x,a) \leq \epsilon\}$. Rozważmy następujące implikacje: (D) A domknięty $\Rightarrow A_\epsilon$ domknięty; (O) A otwarty $\Rightarrow A_\epsilon$ otwarty; (Z) A zwarty $\Rightarrow A_\epsilon$ zwarty; (S) A spójny $\Rightarrow A_\epsilon$ spójny. Dowieść, że: (a) A zwarty $\Rightarrow$ A_ϵ domknięty; (b) w przestrzeni $X := \mathbb{R}^n$ z metryką $d(x,y) := |x-y|$ implikacje (D), (O), (Z) i (S) są również prawdziwe; (c) dla $X :=]-\infty, -1[\cup \{0\} \cup]+1, +\infty[$; z metryką $d(x,y) := |x-y|$ implikacje (D), (O), (Z) i (S) są fałszywe.
9. (C) Wykazać, że przestrzeń metryczna, w której każdy podzbiór ograniczony i domknięty jest zwarty, jest zupełna.
10. Odwzorowanie f nazywa się *domknięte* (*otwarte*), jeżeli f-obrazy zbiorów domkniętych (otwartych) są domknięte (otwarte). Zbadać, czy dane ciągłe (w zwykłej topologii $\mathbb{R}$) odwzorowanie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest domknięte lub otwarte:
    $f(x) := \sqrt{1+x^2}$; $f(x) := \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;(c) $f(x) := \frac{2x}{1+x^2}$; $f(x) := \sin x$.
11. (C) Wykazać, że nie istnieje ciągła bijekcja odcinka domkniętego na zbiór $W := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 \leq x \leq 1, y = 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \ x = 0 \ \ 0 \leq y \leq 1\}$.
12. Wykazać, że nie istnieje ciągła bijekcja $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. (zatem $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}$ nie są homeomorficzne). Uogólnić wynik na $\mathbb{R}^m$ $m \geq 2$ i $\mathbb{R}$.
13. Czy istnieje ciągła bijekcja okręgu na prostą ?
14. (C) Niech $C(r)$ oznacza okrąg na płaszczyźnie o środku w początku układu współrzędnych i promieniu r. Niech $X := \bigcup_{n=2}^\infty C(1-\frac{1}{n})$, $Y := \bigcup_{n=3}^\infty C(\frac{1}{n})$ będą podzbiorami w $\mathbb{R}^2$ ze standardową metryką. a) Wykazać, że X i Y są niezupełnymi przestrzeniami metrycznymi. b) Skonstruować homeomorfizm (tzn. ciągłą bijekcję taką, że odwrotna jest ciągła) $X \to Y$. c) Znaleźć uzupełnienia X i Y i wykazać, że nie są homeomorficzne. (Czyli homeomorficzne przestrzenie metryczne mogą mieć niehomeomorficzne uzupełnienia.)