

Zadania domowe z Analizy IR. Seria 3. 26.11.2013

1. Wylczyć granice:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$; (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$; (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} - \cot x \right)$;
 (d) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - x^4 \log(1 + x^{-2}))$; (e) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} \right)$; (f) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x-1}{\log^2 x} - \frac{1}{x-1} \right)$;
 (g) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$; (h) $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-5} (x - \sqrt{1 + \frac{x^2}{3} \sin x})$; (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{ax} - ax}{e^{bx} - bx} \right) x^{-2}$;
 (j) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}$; (k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x^2/2} - \cos x}{x^4}$; (l) $\lim_{x \rightarrow \pi/4} (\tan x)^{\tan 2x}$;
 (m) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x + \sin x)^{x^{-3}}$; (n) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos(x + \frac{1}{x}) - \cos(x - \frac{1}{x}))$; (o) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$;
 (p) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\cos x) - \sin x}{\cos^4 x}$; (q) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cosh x} \right)^{1/x^2}$; (r) $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{1 + \cos x}$;
 (s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{1 - \cos 3x}$; (t) $\lim_{x \rightarrow 1} (\tan \frac{\pi x}{2})^{1-x}$; (u) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan x \right)^{\frac{1}{\log x}}$.

2. Znaleźć punkty nieciągłości funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (w zależności od wartości parametrów)

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2} & x \neq 1, 2 \\ a & x = 2 \\ 1 & x = 1 \end{cases};$$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^3 + x^2}{\sin x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases};$$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^n - 1}{x^m - 1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}; \quad m, n \in \mathbb{N};$$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{e^x - 1}{|x|} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases};$$

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x^2 + a^2} & |x| > 1 \\ ax^2 + bx + c & |x| \leq 1 \end{cases};$$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases}.$$

3. Dowieść, że liczba rzeczywistych pierwiastków $W_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ jest równa 0 lub 1, zależnie od parzystości $n \in \mathbb{N}$.

4. Która z dwóch liczb jest większa: e^π czy π^e ?

5. Dla $x \in [-1, 1]$ udowodnić tożsamość: $\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. Dla $x \in [0, \infty]$ wykazać nierówność: $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$.

7. Dowieść, że:

- (a) $x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x)$ dla $x > 0$; (b) $\log(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ dla $x > -1$; (c) $e^{2x} < \frac{1+x}{1-x}$ dla $0 < x < 1$;
 (d) $(4 - \cos x) \frac{\sin x}{x} < 3$ dla $x \neq 0$; (e) $|\frac{1+x}{x} \arctan x| < \frac{\pi}{2}$ dla $x < 1$; (f) $1 + x \log(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}$.

8. Dowieść, że funkcja $f(x) := (1+x)^{1/x}$, $-1 < x \neq 0$, da się przedłużyć do funkcji różniczkowalnej na $] -1, \infty[$. Wylczyć $f(0)$ i $f'(0)$ oraz wykazać, że funkcja $x \mapsto f(x)$ jest malejąca, a $x \mapsto (1+x)f(x)$ — rosnąca na $] -1, \infty[$.

9. Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} & \text{gdy } x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{gdy } x = 0 \end{cases}$. Dowieść, że:

- (a) f jest klasy C^1 na \mathbb{R} (wylczyć $f'(0)$);
 (b) f jest malejąca;
 (c) f jest jednostajnie ciągła na \mathbb{R} .
 (d) funkcja $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) - \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ jest nieparzysta.

10. Dowieść, że funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{x^3 - 1}{x^2 + 1}$, ma trzy punkty przegięcia oraz że leżą one na jednej prostej.

11. Zbadać przebieg funkcji, naszkicować wykres:

$$f(x) := \frac{x^2+3x+11}{\sqrt{x^2+2}}, x \in \mathbb{R}; f(x) := (x+2)e^{\frac{1}{x}}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$f(x) := (x - \frac{3}{x})e^{-\frac{2}{x}}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

$$f(x) := \arcsin \frac{3x-x^3}{(1+x^2)^{3/2}}, x \in \mathbb{R};$$

$$f(x) := (x+1) \arctan x, x \in \mathbb{R}.$$

12. Wykazać, że dla dowolnych rozłącznych przedziałów domkniętych $[a,b]$ i $[c,d]$ w \mathbb{R} istnieje funkcja na \mathbb{R} klasy C^∞ taka, że $f \equiv 0$ na $[a,b]$ i $f \equiv 1$ na $[c,d]$. Wsk. Można wykorzystać funkcję $f(x) := e^{-\frac{1}{x^2}}$