Zadania domowe z Analizy IR. Seria 3. 3.12.2014

1. Wyliczyć granice:
   (a) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$; (b) $\lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$; (c) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}(\frac{1}{x} - \cot x)$;
   (d) $\lim_{x\to\infty}(x^2 - x^4 \log(1 + x^{-2}))$; (e) $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1})$; (f) $\lim_{x\to 1}(\frac{x-1}{\log^2 x} - \frac{1}{x-1})$;
   (g) $\lim_{x\to 0}(1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$; (h) $\lim_{x\to 0} x^{-5}(x - \sqrt{1 + \frac{x^2}{3}}\sin x)$; (i) $\lim_{x\to 0}(\frac{e^{ax}-ax}{e^{bx}-bx})^{x^{-2}}$;
   (j) $\lim_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x-a}$; (k) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x^2/2}-\cos x}{x^4}$; (l) $\lim_{x\to\pi/4}(\tan x)^{\tan 2x}$;
   (m) $\lim_{x\to 0}(1 - x + \sin x)^{x^{-3}}$; (n) $\lim_{x\to\infty}(\cos(x + \frac{1}{x}) - \cos(x - \frac{1}{x}))$; (o) $\lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$;
   (p) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(\cos x)-\sin x}{\cos^4 x}$; (q) $\lim_{x\to 0}(\frac{\cos x}{\cosh x})^{1/x^2}$; (r) $\lim_{x\to\pi} \frac{1-\cos x \cos 2x \cos 3x}{1+\cos x}$;
   (s) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{1-\cos 3x}$; (t) $\lim_{x\to 1-}(\tan\frac{\pi x}{2})^{1-x}$; (u) $\lim_{x\to\infty}(\frac{\pi}{2} - \arctan x)^{\frac{1}{\log x}}$.

2. Znaleźć punkty nieciągłości funkcji $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ (w zależności od wartości parametrów)

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2} & x \neq 1, 2 \\ a & x = 2 \\ 1 & x = 1 \end{cases} ;$$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^3+x^2}{\sin x} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases} ;$$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^n-1}{x^m-1} & x \neq 1 \quad m, n \in N \\ a & x = 1 \end{cases} ;$$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{e^x-1}{|x|} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases} ;$$

$$f(x) := \begin{cases} \sqrt{x^2 + a^2} & |x| > 1 \\ ax^2 + bx + c & |x| \leq 1 \end{cases} ;$$

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} & x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & x = 0 \end{cases} .$$

3. Dowieść, że liczba rzeczywistych pierwiastków $W_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$ jest równa 0 lub 1, zależnie od parzystości $n \in \mathbb{N}$.

4. Która z dwóch liczb jest większa: e^π czy π^e ?

5. Dla $x \in [-1, 1]$ udowodnić tożsamość: $\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

6. Dla $x \in [0, \infty]$ wykazać nierówność: $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$.

7. Dowieść, że:
   (a) $x - \frac{x^2}{2} < \log(1 + x)$ dla $x > 0$; (b) $\log(1 + x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ dla $x > -1$; (c) $e^{2x} < \frac{1+x}{1-x}$ dla $0 < x < 1$;
   (d) $(4 - \cos x)\frac{\sin x}{x} < 3$ dla $x \neq 0$; (e) $|\frac{1+x}{x}\arctan x| < \frac{\pi}{2}$ dla $x < 1$; (f) $1 + x\log(x + \sqrt{1 + x^2}) \geq \sqrt{1 + x^2}$.

8. Dowieść, że funkcja $f(x) := (1 + x)^{1/x}, -1 < x \neq 0$, da się przedłużyc do funkcji różniczkowalnej na $]-1, \infty[$. Wyliczyć $f(0)$ i $f'(0)$ oraz wykazać, że funkcja $x \mapsto f(x)$ jest malejąca, a $x \mapsto (1 + x)f(x)$ — rosnąca na $]-1, \infty[$.

9. Niech $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1} & \text{gdy} \quad x \neq 0 \\ \frac{1}{2} & \text{gdy} \quad x = 0 \end{cases}$. Dowieść, że:
   (a) f jest klasy C^1 na $\mathbb{R}$ (wyliczyć $f'(0)$);
   (b) f jest malejąca;
   (c) f jest jednostajnie ciągła na $\mathbb{R}$.
   (d) funkcja $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x) - \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$ jest nieparzysta.

10. Dowieść, że funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) := \frac{x^3-1}{x^2+1}$, ma trzy punkty przegięcia oraz że leżą one na jednej prostej.

11. Zbadać przebieg funkcji, naszkicować wykres:
$f(x) := \frac{x^2+3x+11}{\sqrt{x^2+2}}$, $x \in \mathbb{R}$; $f(x) := (x+2)e^{\frac{1}{x}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
$f(x) := (x - \frac{3}{x})e^{-\frac{2}{x}}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
$f(x) := \arcsin \frac{3x-x^3}{(1+x^2)^{3/2}}$, $x \in \mathbb{R}$;
$f(x) := (x+1)\arctan x$, $x \in \mathbb{R}$.

12. Wykazać, że dla dowolnych rozłącznych przedziałów domkniętych [a,b] i [c,d] w $\mathbb{R}$ istnieje funkcja na $\mathbb{R}$ klasy C^∞ taka, że $f \equiv 0$ na [a,b] i $f \equiv 1$ na [c,d]. Wsk. Można wykorzystać funkcję $f(x) := e^{-\frac{1}{x^2}}$

13. Obliczyć całki nieoznaczone:
(a) $\int (x^2-2x+3)e^x dx$; (b) $\int \sin^3 x\, dx$; (c) $\int \frac{x\, dx}{\cos^2 x}$; (d) $\int \sqrt{x}(\log x)^2 dx$; (e) $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$; (f) $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^4+1}$; (g) $\int \frac{(x+1)dx}{(x^2+x+2)(x^2+4x+5)}$;)h) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{1+x^4}}$; (i) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n+1}}$; (j) $\int \frac{\sqrt{x}\, dx}{\sqrt{1-x^3}}$; (k) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n-1}}$; (l) $\int \frac{x\, dx}{x^3+1}$; (m) $\int \frac{(x^2-1)dx}{x^4+1}$; (n) $\int \frac{(x^2+1)dx}{x^4+1}$; (o) $\int \tan^2 x\, dx$; (p) $\int \frac{1}{x^2} \arcsin x\, dx$; (q) $\int \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx$; (r) $\int x^{-\frac{3}{2}} \log(1+\sqrt{x})dx$; (s) $\int \frac{\log|1-x|}{x^{n+1}} dx$; (t) $\int (\frac{x}{\arctan x} - 1)^{-2} dx$; (u) $\int \sin(\log x)dx$; (w) $\int \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{2+\cos 2x}}$; (x) $\int \frac{\tan 2x\, dx}{2-3\cos^2 x}$; (y) $\int \frac{\sin x \cos^3 x\, dx}{2+\sin^2 x}$; (z) $\int \sqrt{e^{2x}+2e^x+4}\, dx$; (aa) $\int e^{-x}\frac{x^n}{n!} dx$; (ab) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+x}}$; (ac) $\int \frac{dx}{1+x+\sqrt{x^2+x}}$; (ad) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x-x^2}}$; (ae) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x-x^2}}$;

14. Obliczyć całki oznaczone:
(a) $\int_1^2 \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+1}}$; (b) $\int_0^1 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\, dx$; (c) $\int_2^3 \frac{dx}{x \log x}$; (d) $\int_0^1 \sqrt{1+4x^2} dx$; (e) $\int_0^{\frac{3}{4}} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}}$; (f) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2+x}}{x+1}$ (g) $\int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$ (h) $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$ (i) $\int_0^1 \log^3 x dx$; (j) $\int_0^1 \frac{\arctan\sqrt{x}}{(1+x)\sqrt{x}} dx$; (k) $\int_0^\pi \frac{dx}{1+\tan^p x}$ dla $p \in \mathbb{R}$; (l) $\int_0^\pi \frac{\sin nx}{\sin x} dx$, $n \in \mathbb{N}$; (m) $\int_0^\pi \cos^n x \cos nx\, dx$; (n) $\int_0^\pi \frac{dx}{3+2\cos x}$; (o) $\int_{-\pi}^\pi \frac{dx}{1+\sin^2 x}$; (p) $\int_0^\pi \frac{dx}{1+2\sin x(\sin x+\cos x)}$; (q) $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}$; (r) $\int_a^b (x-a)^m (b-x)^n dx$, $m,n \in \mathbb{N}$, $a < b$; (s) $\int_0^1 (1-x^2)^n dx$, $n \in \mathbb{N}$; (t) $\int_0^{\log 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$;

15. Obliczyć pochodne funkcji:
(a) $f(x) := \int_{x^2}^{x^3} \sin(t^2)$; (b) $g(x) := \int_{\sin x}^{\cos x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$.

16. Zbadać funkcję $f(x) := \int_0^x \frac{t^2+t}{\sqrt{t^2-2t+2}} dt$

17. Dowieść, że jeśli funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest ciągła oraz spełnia warunek $\forall x \in \mathbb{R} : \int_x^{x+1} f(t)dt = 0$, to jest okresowa.

18. Wyrazić $F_{n+1}(x)$ przez $F_n(x)$, jeśli:
(a) $F_n(x) := \int (\frac{x^2}{x^2+1})^n dx$ (b) $F_n(x) := \int \frac{dx}{x(x^2+1)^n}$ (wyliczyć $F_4(x)$) (c) $F_n(x) := \int \frac{x^p\, dx}{\log^n x}$, $p \in \mathbb{R}$ (d) $F_n(x) := \int x^{p-n} e^x dx$, $p \in [0,1[$ (e) $\int \frac{dx}{x^n(1+x)}$ (wyprowadzić wzór na $F_n(x)$)

19. Znaleźć wzór rekurencyjny, wyrażający $F_{n+2}(x)$ przez $F_n(x)$, jeśli:
(a) $F_n(x) := \int \cos^n x\, dx$ (b) $F_n(x) := \int \frac{dx}{\sin^n x}$ (c) $F_n(x) := \int \frac{dx}{x^n(x^2+1)}$ (znaleźć wzory na $F_{2k}(x)$ i $F_{2k+1}(x)$)
(d) $F_n(x) := \int \frac{x^n\, dx}{\sqrt{x^2+1}}$ (e) $F_n(x) := \int x^n \cos x\, dx$

20. Rozważając sumy Riemanna odpowiednio dobranej całki wyliczyć granice:
(a) $\lim_{n\to\infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2+k^2} = \frac{\pi}{4}$; (b) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{kn}) = \log k$ dla $2 \leq k \in N$; (c) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}} = \frac{1}{\log 2}$.

21. (C) Dla $k \in \mathbb{Z}_+$ oznaczmy $c_k := \int_0^a x^k \cos x\, dx$, gdzie $a := \frac{\pi}{2}$. Wykazać, że:
(a) $c_{2n} = (-1)^n (2n)! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k a^{2k}}{(2k)!}$; (b) $c_{2n+1} = (-1)^n (2n+1)! (\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k a^{2k+1}}{(2k+1)!} - 1)$;
(c) $0 \leq \frac{a}{(k+1)(k+2)} - \frac{c_k}{a^{k+1}} \leq \frac{k! a^3}{(k+4)!}$; (d) $\lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{a^{k+1}} c_k = a = \frac{\pi}{2}$.