Zadania domowe z Analizy I ind Seria 4. 22.12.2014

1. Zbadać zbieżność szeregów:
(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nE(\sqrt{n})}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{E(\sqrt{n})} - \frac{1}{\sqrt{n}})$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{E(n\sqrt{2})}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{n^2\pi}{n+1}$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt[4]{n^2+n+1})^p$; (f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(na)}{n+5\sin n}$; (g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n+1}$; (h) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3-2n}{3+2n})^n$; (i) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{3} - 2)^n$; (j) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{1+\sqrt[n]{p}})^n$; (k) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi\sqrt{n^2+1}$; (l) $\sum_{n=1}^{\infty}(10 - p\sqrt[n]{5})^n$; (m) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p+q\log n}$; (n) $\sum_{n=1}^{\infty} \log\frac{n(n+1)}{n^2+1}$; (o) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2n-\cos n}$; (p) $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \frac{1}{\sqrt{n}})^n$; (q) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\log(1 + \frac{1}{n})$; (r) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{2} - \sqrt{n})$; (s) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n+1}{n(n+1)^n}$; (t) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2n+1)}{n^p}$; (u) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt[3]{n^2+1}}}{2^n}$; (w) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n})$; (x) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}}$; (y) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2+n}{1+n^2})^p$; (z) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}}$; (aa) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-\frac{1}{2n})^n}{n^{n-\frac{1}{2n}}}$; (ab) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{(-1)^n}{2n})$; (ac) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{1+\frac{1}{n}} - \sqrt{1-\frac{1}{n}})$; (ad) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{5^{\sqrt{2n}}}$; (ae) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 3^{-\sqrt{n}}$; (af) $\sum_{n=1}^{\infty} \log(\cos\frac{1}{n})$; (ag) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\log(1 + \frac{1}{n})$; (ai) $\sum_{n=1}^{\infty} n!\sin\frac{\pi}{2^n}$; (aj) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-n(-1)^n}$; (ak) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\begin{array}{c}3n\\ n\end{array}\right) 11^{-n}$; (al) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} 7^{-n}$; (am) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+5\sin n})\sin(n\alpha)$; (an) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n-1}{n+1})^{n(n-1)}$; (ao) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log n}$; (ap) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\log n}$; (aq) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; (ar) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{\log n}}$; (as) $\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-\log(\log n)}$; (at) $\sum_{n=2}^{\infty} (\log\log n)^{-\log n}$; (au) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$; (aw) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{\sqrt[n]{n!}}$; (ax) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n})$; (ay) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n})$; (az) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{E(\frac{n}{\sqrt{5}})}$; (ba) $\sum_{n=1}^{\infty}(2 - \sqrt[n]{n})^n$; (bb) $\sum_{n=1}^{\infty}(1 - \sqrt[n]{1-\frac{1}{n}})$; (bc) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi\sqrt[n]{n^3+n})$;

2. Ciąg liczbowy (c_n) jest okresowy, tzn. $\exists M \in \mathbb{N} : \forall n : c_{n+M} = c_n$. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n}$ jest zbieżny $\iff$ $c_1 + \ldots + c_M = 0$, przy czym wtedy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} = \int_0^1 \frac{c_1+c_2x+\ldots+c_Mx^{M-1}}{1-x^M}dx$. Obliczyć $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{6k+1} - \frac{3}{6k+3} + \frac{2}{6k+5})$.

3. (C) Dowieść, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, to do tej samej sumy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n$ o wyrazach $\tilde{a}_n := \frac{1}{n(n+1)}(a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n)$.

4. Niech $s := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ oraz $s' := 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots$ (s' różni się od s jedynie kolejnością składników: po dwóch składnikach dodatnich następuje jeden składnik ujemny). Wykazać, że $s' = \frac{3}{2}s$.

5. (C) Załóżmy, że $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i istnieje $f''(0)$. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $f(0) = f'(0) = 0$. *Uwaga.* Przykład $f(0) = 0$, $f(x) := x(\log\frac{1}{x})^{-1}$ dla $0 < x \leq 1$ (wtedy f różniczkowalna, $f(0) = f'(0) = 0$, a $\sum_{n=1}^{\infty} f(1/n)$ — rozbieżny), pokazuje istotność założenia o istnieniu $f''(0)$.

6. (C) Wykazać, że jeśli $a_n > 0$ i istnieje $l := \lim_{n\to\infty} \frac{\log a_n}{\log n}$, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest przy $l < -1$ zbieżny, a przy $l > -1$ — rozbieżny.