Zadania domowe z Analizy IR. Seria 5. 11.01.2014

1. Zbadać zbieżność szeregów:
(a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nE(\sqrt{n})}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{E(\sqrt{n})}-\frac{1}{\sqrt{n}})$; (c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{E(n\sqrt{2})}$; (d) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{n^2\pi}{n+1}$; (e) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt[4]{n^2+n+1})^p$; (f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(na)}{n+5\sin n}$; (g) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n\alpha|}{n+1}$; (h) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{3-2n}{3+2n})^n$; (i) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{3}-2)^n$; (j) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{1+\sqrt[n]{p}})^n$; (k) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\pi\sqrt{n^2+1}$; (l) $\sum_{n=1}^{\infty}(10-p\sqrt[n]{5})^n$; (m) $\sum_{n=1}^{\infty}n^{p+q\log n}$; (n) $\sum_{n=1}^{\infty}\log\frac{n(n+1)}{n^2+1}$; (o) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2n-\cos n}$; (p) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{\sqrt{n}})^n$; (q) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\log(1+\frac{1}{n})$; (r) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{2}-\sqrt{n})$; (s) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n+1}{n(n+1)^n}$; (t) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(2n+1)}{n^p}$; (u) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^{\sqrt[3]{n^2+1}}}{2^n}$; (w) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n})$; (x) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(n+n)}}$; (y) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2+n}{1+n^2})^p$; (z) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}}$; (aa) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-\frac{1}{2n})^n}{n^{n-\frac{1}{2n}}}$; (ab) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\ldots+\frac{(-1)^n}{2n})$; (ac) $\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}})$; (ad) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{5^{\sqrt{2n}}}$; (ae) $\sum_{n=1}^{\infty}n^3 3^{-\sqrt{n}}$; (af) $\sum_{n=1}^{\infty}\log(\cos\frac{1}{n})$; (ag) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\log(1+\frac{1}{n})$; (ai) $\sum_{n=1}^{\infty}n!\sin\frac{\pi}{2^n}$; (aj) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1-n(-1)^n}$; (ak) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\begin{array}{c}3n\\ n\end{array}\right)11^{-n}$; (al) $\sum_{n=1}^{\infty}\binom{3n}{n}7^{-n}$; (am) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+5\sin n})\sin(n\alpha)$; (an) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n-1}{n+1})^{n(n-1)}$; (ao) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$; (ap) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\log n}$; (aq) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$; (ar) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log n)^{\log n}}$; (as) $\sum_{n=2}^{\infty}(\log n)^{-\log(\log n)}$; (at) $\sum_{n=2}^{\infty}(\log\log n)^{-\log n}$; (au) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$; (aw) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^p}{\sqrt[n]{n!}}$; (ax) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\log\frac{n+1}{n})$; (ay) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n})$; (az) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{E(\frac{n}{\sqrt{5}})}$; (ba) $\sum_{n=1}^{\infty}(2-\sqrt[n]{n})^n$; (bb) $\sum_{n=1}^{\infty}(1-\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}})$; (bc) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt[n]{n^3+n})$;

2. Ciąg liczbowy (c_n) jest okresowy, tzn. $\exists M\in\mathbb{N}:\forall n: c_{n+M}=c_n$. Dowieść, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n}$ jest zbieżny $\iff c_1+\ldots+c_M=0$, przy czym wtedy $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{n}=\int_0^1\frac{c_1+c_2x+\ldots+c_Mx^{M-1}}{1-x^M}dx$. Obliczyć $\sum_{k=0}^{\infty}(\frac{1}{6k+1}-\frac{3}{6k+3}+\frac{2}{6k+5})$.

3. (C) Dowieść, że jeśli szereg $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest zbieżny, to do tej samej sumy zbieżny jest szereg $\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n$ o wyrazach $\tilde{a}_n:=\frac{1}{n(n+1)}(a_1+2a_2+\ldots+na_n)$.

4. Niech $s:=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ oraz $s':=1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\ldots$ (s' różni się od s jedynie kolejnością składników: po dwóch składnikach dodatnich następuje jeden składnik ujemny). Wykazać, że $s'=\frac{3}{2}s$.

5. (C) Załóżmy, że $f:[0,1]\mapsto\mathbb{R}$ jest różniczkowalna i istnieje $f''(0)$. Wykazać, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$ jest zbieżny wtedy i tylko wtedy, gdy $f(0)=f'(0)=0$. *Uwaga.* Przykład $f(0)=0$, $f(x):=x(\log\frac{1}{x})^{-1}$ dla $0<x\le 1$ (wtedy f różniczkowalna, $f(0)=f'(0)=0$, a $\sum_{n=1}^{\infty}f(1/n)$ — rozbieżny), pokazuje istotność założenia o istnieniu $f''(0)$.

6. (C) Wykazać, że jeśli $a_n>0$ i istnieje $l:=\lim_{n\to\infty}\frac{\log a_n}{\log n}$, to $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ jest przy $l<-1$ zbieżny, a przy $l>-1$ — rozbieżny.