

Zadania z Geometrii Różniczkowej

Seria -1.

Listopad 2011

1. Sprawdzić, że odwzorowanie $\Phi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\Phi(s, t) := (s + t \sin s, \log |\cos s| + t \cos s)$, jest odwracalne na pewnym otoczeniu punktu $(0, 0)$. Wykazać, że współrzędne S, T odwzorowania odwrotnego $\Phi^{-1}(x, y) = (S(x, y), T(x, y))$ spełniają równania:

$$|\nabla T|^2 := (T'_x)^2 + (T'_y)^2 = 1, \langle \nabla S | \nabla T \rangle := S'_x T'_x + S'_y T'_y = 0, |\nabla S| = (T + \frac{1}{\cos S})^{-1}.$$
1. Oznaczając $\delta := t + \frac{1}{\cos s}$ mamy: $\Phi'(s, t) = \begin{bmatrix} \delta \cos s & \sin s \\ -\delta \sin s & \cos s \end{bmatrix}$, więc $\det \Phi'(s, t) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \delta$, co w $(s, t) = (0, 0)$ jest równe 1, skąd odwracalność; z kolei $(\Phi^{-1})'(x, y) = (\Phi'(s, t))^{-1} = \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \delta \sin s & \delta \cos s \end{bmatrix}$, skąd teza.
2. Jaką powierzchnię w \mathbf{R}^3 opisuje parametryzacja $x = \frac{u^2 - v^2}{1 + u^2 + v^2}$, $y = \frac{2uv}{1 + u^2 + v^2}$, $z = \frac{1}{1 + u^2 + v^2}$? Sprawdzić jej regularność.
 2. *Odpowiedź.* Część stożka $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$, opisana nierównościami $0 < z < 1$. Istotnie, $|x + iy| = \frac{|(u+iv)^2|}{1+u^2+v^2} = \frac{u^2+v^2}{1+u^2+v^2} = 1 - z$.
 3. Dowieść, że dla $p > 3$ zbiór $C_p := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}_+^3 : xy + yz + zx = p, xyz = 1\}$ jest gładką, zwartą i spójną krzywą w \mathbf{R}^3 . Dla $p = 5$ wyznaczyć ekstremalne wartości x, y i z na C_p .
 3. Skoro $\nabla f_1 \times \nabla f_2 = [x^2(y-z), y^2(z-x), z^2(x-y)]$, to dla $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbf{R}_+^3$ rząd $f'(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y+z & z+x & x+y \\ yz & zx & xy \end{bmatrix}$ jest mniejszy od 2 $\iff x = y = z$, a ten warunek dla $\mathbf{x} \in C_p$ nie jest spełniony; to dowodzi, że C_p jest gładką 1-wymiarową rozmaitością.
 4. Określmy $\phi : U \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$, $U := \{u \in \mathbf{C} : |u| = 1\}$, wzorem $\phi(u, t) := (tu, \text{Im}(u^2)) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R} = \mathbf{R}^3$. Sprawdzić, że: $1^0 S := \phi(U \times \mathbf{R}) = \{(x, y, z) : (x^2 + y^2 > 0, z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}) \text{ lub } (x = y = 0, |z| \leq 1)\}$; $2^0 \phi$ jest lokalnym dyfeomorfizmem na $U \times \mathbf{R}$ pomniejszonym o 4 punkty nieregularne $(\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}, 0)$, których obrazami są 2 punkty $(0, 0, \pm 1) \in S$; $3^0 \phi(-u, -t) = \phi(u, t)$, więc ϕ określa odwzorowanie ϕ_0 wstęgi Möbiusa $M := (U \times \mathbf{R})/\pm$ w S (symetrycznie położone punkty "równika" wstęgi są sklejjane przez odwzorowanie ϕ_0).
 4. 2^0 Niech $\tilde{\phi} : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\tilde{\phi}(s, t) := \phi(e^{is}, t) = (t \cos s, t \sin s, \sin 2s)$ (złożenie ϕ z lokalnym dyfeomorfizmem $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow U \times \mathbf{R}$, $(s, t) \mapsto (e^{is}, t)$); macierz $\tilde{\phi}'(s, t)$ ma następujące minory stopnia 2.: $t, 2 \cos s \cos 2s, 2 \sin s \cos 2s$; są one $= 0$ (tzn. $\tilde{\phi}'$ ma < 2 rząd) $\iff (t = 0, \cos 2s = 0) \iff (t = 0, e^{is} = \frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}})$.
 5. Utożsamijmy \mathbf{R}^4 z \mathbf{C}^2 , zapisując punkt $(u_1, u_2, v_1, v_2) \in \mathbf{R}^4$ w postaci (u, v) , gdzie $u = u_1 + iu_2, v = v_1 + iv_2$. Oznaczmy $S := \{(u, v) : v \neq 0, u = \frac{v^2}{|v|^2}\}$. Dowieść, że: $1^0 S$ jest gładką powierzchnią w \mathbf{R}^4 , homeomorficzną z powierzchnią walca; $2^0 \bar{S}$ (domknięcie S w \mathbf{R}^4) jest gładką powierzchnią, homeomorficzną ze wstęgą Möbiusa.
 5. Ad 1^0 . S jest wykresem gładkiego odwzorowania $\mathbf{C}^* \ni v \mapsto \frac{v^2}{|v|^2} \in \mathbf{C}$, więc jest gładka. Odwzorowanie $\phi : U \times \mathbf{R} \rightarrow S, U := \{z \in \mathbf{C} : |z| = 1\}$, dane wzorem $\phi(z, t) := (z^2, e^t z)$, jest oczywiście ciągłą bijekcją (parametryzacja S); odwzorowanie odwrotne $\phi^{-1}(u, v) = (\frac{v}{|v|}, \log |v|)$ także jest ciągłe, więc ϕ jest homeomorfizmem walca $U \times \mathbf{R}$ na S . Ad $2^0 \bar{S} = S \cup \{(u, v) : |u| = 1, v = 0\}$ (łatwe sprawdzenie), więc $\bar{S} = \{(u, v) : |u| = 1, v \in \mathbf{R}\sqrt{|u|}\}$. Warunek $v \in \mathbf{R}\sqrt{|u|}$ jest równoważny $\text{Im}(\sqrt{|u|} \bar{v}) = 0$; łatwo też sprawdzić, że dla $u \in U$ mamy: $\sqrt{u} = \pm \frac{1}{\sqrt{2+2u_1}}[(1+u_1) + iu_2]$ dla $u \neq -1$, $\sqrt{u} = \pm \frac{1}{\sqrt{2-2u_1}}[u_2 + i(1-u_1)]$ dla $u \neq 1$. Rozłóżmy \bar{S} na sumę dwóch otwartych w \bar{S} podzbiorów: $\bar{S} = S_1 \cup S_2$, określonych warunkami $u \neq -1$ (dla S_1) i $u \neq 1$ (dla S_2); mamy wtedy: $S_1 = \{(u, v) : g_0 = 0, g_1 = 0\}$, $S_2 = \{(u, v) : g_0 = 0, g_2 = 0\}$, gdzie $g_0 := |u|^2 - 1 = u_1^2 + u_2^2 - 1$, a $g_1 := u_2 v_1 - (1+u_1)v_2$ i $g_2 := (1-u_1)v_1 - u_2 v_2$ (części urojone liczb $[(1+u_1) + iu_2]\bar{v}$ i $[u_2 + i(1-u_1)]\bar{v}$ odpowiednio). Zauważmy teraz, że na S_1 jest $\neq 0$ przynajmniej jeden z wyznaczników $\frac{\partial(g_0, g_1)}{\partial(u_1, v_2)} = -2u_1(1+u_1)$ i $\frac{\partial(g_0, g_1)}{\partial(u_2, v_2)} = -2u_2(1+u_1)$, a na S_2 jest $\neq 0$ przynajmniej jeden z wyznaczników $\frac{\partial(g_0, g_2)}{\partial(u_1, v_1)} = 2u_1(1-u_1)$ i $\frac{\partial(g_0, g_2)}{\partial(u_2, v_1)} = 2u_2(1-u_1)$; zatem $\nabla g_0, \nabla g_1$ są lin. niezal. na S_1 , a $\nabla g_0, \nabla g_2$ są lin. niezal. na S_2 , a więc obie części S_1, S_2 powierzchni \bar{S} są gładkie. Weźmy odwzorowanie $\psi : U \times \mathbf{R} \rightarrow \bar{S}$, $\psi(z, t) := (z^2, tz)$; jasne, że ψ jest ciągłą surjekcją, przy czym $\psi(z, t) = \psi(z', t') \iff (z', t') = \pm(z, t)$, a więc mamy ciągłą bijekcję $\tilde{\psi} : M := (U \times \mathbf{R})/\pm \rightarrow \bar{S}$; odwzorowanie odwrotne $\tilde{\psi}^{-1}(u, v) = \sqrt{|u|}(1, \frac{v}{u})$ też jest ciągłe, więc ψ jest homeomorfizmem wstęgi Möbiusa M na \bar{S} .
 6. Niech $H := \{(x, y, z) : x \sin z - y \cos z = 0\}$ (tzw. *helikoida*). Dowieść, że: $1^0 H$ jest gładką powierzchnią w \mathbf{R}^3 ; $2^0 H$ jest homeomorficzna z \mathbf{R}^2 . 3^0 Wyznaczyć przecięcie H z płaszczyzną $\Sigma(p_0)$ styczną do H w punkcie $p_0 = (x_0, y_0, z_0) \in H$; 4^0 dowieść, że $H \cap \Sigma(p_0)$ zawiera dwie krzywe, przecinające się prostopadle w punkcie p_0 .
 6. $1^0 H = h^{-1}(0)$, gdzie $h(x, y, z) := x \sin z - y \cos z$; skoro $\nabla h = [\sin z, -\cos z, x \cos z + y \sin z] \neq 0$, to H jest powierzchnią gładką. 2^0 Niech $\phi(t, u) := (t \cos u, t \sin u, u)$; wtedy $\phi(\mathbf{R}^2) = H$: $h \circ \phi(t, u) = 0$ oraz $x \sin z - y \cos z = 0 \Rightarrow \phi(x \cos z + y \sin z, z) = (x, y, z)$; ϕ jest iniektywne: $\phi(t, u) = (x, y, z) \Rightarrow u = z$ & $t = x \cos z + y \sin z$; zarówno ϕ , jak i $\phi^{-1} : H \rightarrow \mathbf{R}^2$, są ciągłe: $\phi^{-1}(x, y, z) = (x \cos z + y \sin z, z)$; stąd teza. 3^0 Oznaczmy dla wygody $c := \cos z_0$, $s := \sin z_0$, $d := cx_0 + sy_0$; wtedy $|d|$ jest odległością p_0 od

osi $0z$: $x_0^2 + y_0^2 = (cx_0 + sy_0)^2 + (sx_0 - cy_0)^2 = d^2$. $T_{p_0}(H) = \ker \nabla h(p_0) = \ker[s, -c, d]$ jest rozpięta przez $[c, s, 0]^T$ i $[-sd, cd, 1]^T$, więc $\Sigma(p_0) = \{(x_0 + ct - sdu, y_0 + st + cdu, z_0 + u) : (t, u) \in \mathbf{R}^2\}$; stąd $H \cap \Sigma(p_0)$ opisana jest równaniem $0 = x \sin z - y \cos z = (x_0 + ct - sdu)(s \cos u + c \sin u) - (y_0 + st + cdu)(c \cos u - s \sin u) = (t + d) \sin u - du \cos u$. ^{4⁰} *Przypadek $d \neq 0$* : $(t + d) \sin u - du \cos u = 0$ przy $\sin u \neq 0$ oznacza $t = d(u \operatorname{ctg} u - 1)$, a przy $\sin u = 0$ oznacza $u = 0$; wobec tego przez p_0 przechodzą dwie krzywe z $H \cap \Sigma(p_0)$: $p_1(u) = p_0 + d[c(u \operatorname{ctg} u - 1) - su, s(u \operatorname{ctg} u - 1) + cu, \frac{1}{d}u]$ oraz $p_2(t) = p_0 + t[c, s, 0]$ (prosta pozioma), przy czym $p_1'(0) = [-sd, cd, 1]$ jest prostopadły do $p_2'(0) = [c, s, 0]$. *Przypadek $d = 0$* : Teraz $H \cap \Sigma(p_0)$ opisane jest warunkiem $t \sin u = 0$; $t = 0$ daje prostą pionową $p_1(u) = p_0 + u[0, 0, 1]$, zaś $u = n\pi$ daje proste poziome $p_{2,n}(t) = p_0 + [ct, st, n\pi]$, przecinające prostopadle $p_1(u)$.

7. Dowieść, że dla dowolnych funkcji $a, b, c \in C^k(\mathbf{R})$, $k \geq 1$, zbiór $S := \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$, gdzie $F(x, y, z) := a(z)x^2 + 2b(z)xy + c(z)y^2 - 1$, jest (regularną) powierzchnią klasy C^k w \mathbf{R}^3 .
7. Tożsamość $(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}) F(x, y, z) = 2F(x, y, z) + 2$ sprawia, że $(F'_x, F'_y) \neq 0$ w każdym punkcie S .