Zadania domowe z geometrii różniczkowej – seria +1

Zadanie 1. **(a)** W przestrzeni $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ definiujemy relację równoważności:

$$(x,y,z) \sim_1 (x',y',z') \quad \Leftrightarrow \quad \exists \lambda \neq 0: \ (x,y,z) = (\lambda x', \lambda y', \lambda z').$$

Klasy równoważności względem tej relacji są prostymi w $\mathbb{R}^3$ przecinającymi się w $(0,0,0)$ z wyjętym punktem przecięcia. Zbiór $\mathbb{R}P^2 = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}/\sim_1$ wyposażamy w topologię ilorazową. Definiujemy trzy mapy na zbiorach

$$O_x = \{[x,y,z]: \ x \neq 0\}, \qquad O_y = \{[x,y,z]: \ y \neq 0\}, \qquad O_z = \{[x,y,z]: \ z \neq 0\}$$

wzorami:

$$\varphi_x : O_x \ni [x,y,z] \longmapsto (\tfrac{y}{x}, \tfrac{z}{x}) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\varphi_y : O_y \ni [x,y,z] \longmapsto (\tfrac{x}{y}, \tfrac{z}{y}) \in \mathbb{R}^2,$$

$$\varphi_z : O_y \ni [x,y,z] \longmapsto (\tfrac{x}{z}, \tfrac{y}{z}) \in \mathbb{R}^2.$$

Sprawdzić, że odwzorowania φ_x, φ_y, φ_z zadają w $\mathbb{R}P^2$ strukturę gładkiej rozmaitości różniczkowej. **(b)** W zbiorze $\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}^3 \ni (\alpha, p)$ definiujemy relację równoważności

$$(\alpha, p) \sim_2 (\alpha', p') \quad \Leftrightarrow \quad \alpha = \alpha' \quad \text{i prosta przechodząca przez } p \text{ i } p' \text{ jest równoległa do } \alpha$$

W zbiorze $M = \mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}^3/\sim_2$ wprowadzić strukturę rozmaitości gładkiej tak, aby naturalna projekcja

$$\mathbb{R}P^2 \times \mathbb{R}^3 \ni (\alpha, p) \longmapsto [\alpha, p] \in M$$

była odwzorowaniem gładkim.

Zadanie 2. Obroty w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przeprowadzają proste na proste. Każdy obrót (macierz $O \in {M^3}_3(\mathbb{R})$, $\det O = 1$) definiuje więc odwzorowanie rozmaitości M z zadania (1) w siebie. Oznaczmy to odwzorowanie F_O. Niech

$$O(t) = \begin{bmatrix} \cos 2t & 0 & \sin 2t \\ 0 & -1 & 0 \\ \sin 2t & 0 & -\cos 2t \end{bmatrix}$$

Zapisać w wybranym układzie współrzędnych wektor styczny w punkcie $t = 0$ do krzywej

$$t \longmapsto F_{O(t)}(m),$$

gdzie $m \in M$ jest prostą równoległą do osi $0y$ i przechodzącą przez punkt $(0,0,1)$.

Zadanie 3. Niech $\omega \in \bigwedge^2 V^*$. Udowodnić, że ω jest formą prostą (tzn. jest iloczynem zewnętrznym jednoform) wtedy i tylko wtedy gdy $\omega \wedge \omega = 0$. Niech teraz $\omega', \omega'' \in \bigwedge^2 V^*$ będą formami prostymi. Udowodnić, że $\omega = \omega' + \omega''$ jest formą prostą wtedy i tylko wtedy gdy $\omega' \wedge \omega'' = 0$.

Zadanie 4. Obliczyć $\phi^*\omega$ jeśli

$$\phi : {\mathbb{R}_+}^4 \ni (p,q,r,s) \longmapsto (pq, qr, rs) \in {\mathbb{R}_+}^3$$

oraz

$$\omega = x \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + y \mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + z \mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y \in \bigwedge^2 \mathsf{T}^* {\mathbb{R}_+}^3.$$

Zadanie 5. W $\mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) : y = 0, x \geqslant 0)\}$ wprowadzamy nowy układ współrzędnych:

$$\begin{aligned} x &= \xi\eta\cos\varphi \\ y &= \xi\eta\sin\varphi \\ z &= \tfrac{1}{2}(\xi^2 - \eta^2) \end{aligned}$$

gdzie $\xi > 0$, $\eta > 0$, $\varphi \in]0, 2\pi[$. Korzystając ze wzoru

$$\mathsf{d}\left(\imath(X)\, \mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z\right) = (\operatorname{div} X) \mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z$$

wyrazić dywergencję we współrzędnych (ξ, η, φ).