Analiza 1R, styczeń 1

na niebiesko moje wskazówki, pod zadaniem wskazówki Grzesia i rozwiązania

Zadanie 1 Szeregi:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nE(\sqrt{n})}$; użyć oszacowania $\sqrt{n}-1 \leqslant E(\sqrt{n}) \leqslant \sqrt{n}$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-n(-1)^n}$; wyrazy pogrupować po dwa i użyć pierwszego kryterium porównawczego

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{3n}{n} 7^{-n}$; kryt. d'Alemberta (4) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}\right)$; $a_n = f(\frac{1}{n})$, zbadać f wokół zera

(5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2+n}{1+n^2}\right)^p$; zbieżny gdy $p>1$ (6) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)$; jak (4)

(7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n+1}{n(n+1)^n}$; I porównawcze (8) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3-2n}{3+2n}\right)^n$; warunek konieczny?

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n$; II porównawcze (10) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3}-2)^n$; warunek konieczny ?

(11) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(10-p\sqrt[n]{5}\right)^n$; (12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdot\dots\cdot(n+n)}}$; I porównawcze

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n-1}{2}}}$; kryt. Cauchy ?

(14) $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt[4]{n^2+n+1})^p$; potraktować jak ciąg przy liczeniu granicy

(15) $\sum_{n=1}^{\infty} n! \sin\frac{\pi}{2^n}$; a jak z $\frac{n!}{2^n}$? (16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sqrt[3]{n^2+1}}}{2^n}$; kryt. Cauchy ?

(17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-\frac{1}{2n})^n}{n^{n-\frac{1}{2n}}}$; (18) $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 3^{-\sqrt{n}}$;

(19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(2n+1)}{n^p}$; (20) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{p+q\log n}$; (21) $\sum_{n=3}^{\infty} (\log\log n)^{-\log n}$; kryt. zagęszczeniowe

(22) $\sum_{n=2}^{\infty} (\log n)^{-\log(\log n)}$; (23) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\log(1+\frac{1}{n})$;

(24) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \log(1+\frac{1}{n})$; zbadać $\log(1+\frac{1}{n})$ wokół zera

(25) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log \frac{n(n+1)}{n^2+1}$; $a_n = f(\frac{1}{n})$, zbadać f wokół zera

(26) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \log\cos \frac{1}{n}$; $a_n = f(\frac{1}{n})$, zbadać f wokół zera

(27) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi \sqrt[n]{n^3+n}$; (28) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin\pi\sqrt{n^2+1}$; potraktować jak ciąg przy liczeniu granicy

(29) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n^2\pi}{n+1}$; potraktować jak ciąg przy liczeniu granicy

(30) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{2n-\cos n}$; (31) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n+1}$;

(32) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+5\sin n}\right)\sin n\alpha$; (33) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n+5\sin n}$;

(34) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1}}{2} - \sqrt{n}\right)$; potraktować jak ciąg przy liczeniu granicy

(35) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$; (36) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{1+\sqrt[n]{p}}\right)^{n}$; (37) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{E(\sqrt{n})} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

(38) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{E(n/\sqrt{5})}$; (39) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{E(n\sqrt{2})}$;

(40) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (2-\sqrt[n]{n})^n$; (41) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{\sqrt[n]{n!}}$;

(42) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n}\right)$.

Wskazówki Grzesia Cieciury (9) $a_n \leqslant 2^{-\sqrt{n}} \leqslant n^{-2}$ dla p.w.n; (10),(17),(36) $\lim |a_n| =$?; (11),(13),(16) $\lim \sqrt[n]{|a_n|} =$?; (12), (40) $\lim na_n =$?; (18) $a_n < n^{-2}$ dla p.w.n; (20) porównać z $\sum \frac{1}{n}$ lub $\sum \frac{1}{n^2}$; (21) $\log\log n > e^{-2}$ dla p.w.n; (22) $a_n > \frac{1}{n}$ dla p.w.n; (26) $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, $|\sin x| \leqslant |x|$; (27) $\frac{1}{n} \leqslant \sqrt[n]{n^3+n} - 1 \leqslant \frac{1}{2}$ dla p.w.n; (31) $|\sin x| \geqslant \sin^2 x$; (33) skorzystać z (32); (37) oszacować $\sum_{n=k^2}^{k^2+2k} a_n$; (39) sprawdzić, że $a_n \searrow 0$ lub oszacować $|a_n - \frac{(-1)^n}{\sqrt{2n}}|$; (41) $\lim n^{1-p} a_n =$?; (42) oszacować a_{2k-1} i a_{2k}.

Rozwiązania: Bezwzgl. zbieżne: (1), (3), (4), (9), (13), (16), (18), (21), (23), (26),(32),(34),(35); warunkowo: (2), (24), (28), (29), (30), (33), (38), (39); rozbieżne: (6), (7), (8), (10), (12), (15), (17), (22), (25), (27), (36), (37), (40); (5) zb. $\iff$ $p > 1$; (11) zb.(bezwzgl.) $\iff$ $9 < p < 11$; (14) zb.(bezwzgl.) $\iff$ $p > 2$; (19) zb. $\iff$ $p > 1$; (20) zb. $\iff$ $(q < 0)$ lub $(q = 0, p < -1)$; (31) zb. $\iff$ $\alpha \in \pi\mathbb{Z}$; (40) $na_n = (1+x_n)^n$, gdzie $x_n = -(\sqrt[n]{n}-1)^2$, więc $nx_n \to 0$; (41) zb. $\iff$ $p < 0$