Analiza 1R, styczeń 2

Poniższe zadania dotyczą ciągów i szeregów funkcyjnych, w tym potęgowych. Zadań jest zbyt dużo jak na ćwiczenia, część można potraktować jako zadania domowe.

Zadanie 1 Zbadać zbieżność punktową, jednostajną (ew. niemal jednostajną) podanych ciągów funkcyjnych

$$a_n(x) = n \sin \frac{x}{n} \qquad b_n(x) = \frac{nx}{n + x^2},$$

$$c_n(x) = x\frac{(n+1)x + n}{nx + 1},\ x \in [0, \infty[\qquad d_n(x) = \frac{nx^2 + x}{nx^2 + 1},\ x \in [0, \infty[$$

$$e_n = \frac{1}{1 + n(nx^2 - n - 1)^2}$$

Zadanie 2 Zbadać zbieżność punktową, jednostajną (ew. niemal jednostajną) podanych szeregów funkcyjnych

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1 + x^4 n^4} \qquad g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x + 2^n},$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log(1 + nx)}{1 + n^5 x^2},\ x \in [0, \infty[$$

Zadanie 3 Niech $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ będzie ciągła i dodatnia. Wykazać, że

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{f(x)} - 1\right) = \log f(x), \qquad \lim_{n\to\infty} \left(\int_0^1 \sqrt[n]{f(x)}dx\right)^n = \exp\left(\int_0^1 \log f(x)dx\right),$$

przy czym pierwsza zbieżność jest jednostajna.

Zadanie 4 Czy poprawne są wyliczenia (uzasadnić)

1. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{(x + n - 1)^2 + n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + n} = s\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 2$

2. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\left(\lim_{n\to\infty} \frac{nx^2}{1 + nx^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 0^2}{1 + n \cdot 0^2} = 0$

3. $\displaystyle \lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} x(1 - x)^n = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$

4. $\lim_{x\to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^x}{(2+x)^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$

5. $\lim_{x\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0$

Zadanie 5 Wykazać, że f jest klasy $\mathcal{C}^1$ na $\mathbb{R}$ jeśli

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \qquad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{nx^2+3}}{n^2}$$

Zadanie 6 Wykazać, że f jest klasy $\mathcal{C}^1$ na $]0,\infty[$, ma asymptotę $y = x$ w ∞ oraz $f(0) = 0 \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$. Wykazać także, że $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-1}{x} = \frac{1}{2}$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x}{(1+nx)^2}, \quad f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$$

Zadanie 7 Dowieść, że $\int_0^1 \frac{1}{t} \log\left(\frac{1}{1-t}\right) dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Zadanie 8 Dowieść, że $\int_0^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^4+t^2}\right) dt = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Zadanie 9 Korzystając ze wzorów $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$ oraz przedstawiając funkcję podcałkową w postaci szeregu funkcyjnego wyprowadzić wzory

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \qquad \int_0^{\infty} \frac{xdx}{e^x+1} = \frac{\pi^2}{12}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{xdx}{e^x-1} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \int_0^{\infty} \log(1+e^{-x})dx = \int_0^{\infty} \frac{\log(1+t)}{t} dt = \frac{\pi^2}{12}$$

Zadanie 10 Znaleźć obszar zbieżności i sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-2)x^n}{(n+2)n!}$$

Wskazówka: badać $f(x) - e^x$.

Zadanie 11 Znaleźć obszar zbieżności i sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n^2}{n^2-1} x^{3n-5}$$

Wskazówka: $f(x) = \frac{1}{x^5}\varphi(x^3)$.

Zadanie 12 Obliczyć sumę szeregu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)}{n(n+1)2^n}$$

Zadanie 13 Obliczyć sumę szeregu

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-n}}{n(n+1)}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{-n}}{n(n+1)}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{-n}}{2n+1}$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-3)^{-n}}{2n+1}$;

(g) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (16n^2-4n+1)a^n$;

(h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^2-5n-1}{2^n}$;

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15n^2-4n+1}{2^n}$;

(j) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(3n+1)(3n+2)}$;

(k) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{(3n+1)(3n+2)}$;

(l) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)(3n+2)}$;

(m) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(3n+2)}$.