

Analiza I R
styczeń 3 - całki niewłaściwe

Zadanie 1. Zbadać zbieżność całek ($a > 0$):

$$(a) \int_0^a x^\mu dx \quad (b) \int_a^\infty x^\mu dx, \quad (c) \int_0^\infty x^\mu dx, \quad (d) \int_a^\infty x^{(-1)}(\log x)^\mu dx$$

w zależności od $\mu \in \mathbb{R}$.

Zadanie 2. Zbadać zbieżność całek:

$$(a) \int_0^\infty \sin^2 x dx, (b) \int_0^1 \log x dx, (c) \int_{e^2}^\infty \frac{dx}{x \log \log x}$$

Zadanie 3. Obliczyć całkę $\int_0^\infty \frac{\log x}{a^2 + x^2} dx$. Wsk. Wykazać, że $\int_0^1 \frac{\log x}{1 + x^2} dx = -\int_1^\infty \frac{\log x}{1 + x^2} dx$.

Zadanie 4. Zbadać zbieżność całek

$$(a) \int_0^1 \frac{1}{x} \sin^2 \frac{1}{x} dx, \quad (b) \int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx, \quad (c) \int_0^\infty \frac{x \operatorname{arc} \operatorname{tg} x}{\sqrt[3]{1 + x^4}} dx, \quad (d) \int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}.$$

Zadanie 5. Zbadać (w zależności od $p, q \in \mathbb{R}$) zbieżność całki niewłaściwej:

$$\begin{aligned} (a) \int_0^1 (1-x)^p e^{-\frac{1}{\log x}} dx & \quad (b) \int_0^{1/e} \frac{dx}{x^p |\log x|^q} \\ (c) \int_0^1 \frac{dx}{|\log(1-x)|^p |\log x|^q} & \quad (d) \int_{-1}^1 (\cos \frac{\pi}{2} x)^{p+qx} dx \\ (e) \int_0^\infty \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sin x)}{x} dx & \quad (f) \int_\pi^\infty \frac{(1+p \cos x) dx}{(5+4 \cos x)x} \\ (g) \int_0^\infty e^{-x \sin^2 x} dx & \quad (h) \int_0^\infty e^{-x \sin^2 x} \frac{dx}{x+1} \\ (i) \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^p \sin^2 x} & \quad (j) \int_0^\infty (1-e^{-\frac{1}{x}}) \frac{dx}{x^p} \\ (k) \int_0^1 \frac{\sin(x^p)}{x} dx & \quad (l) \int_1^\infty \frac{\sin(x^p)}{x} dx \\ (m) \int_0^\infty \frac{\sin x dx}{\sqrt{x^2 + \sin^2 x}} & \end{aligned}$$