Wykład 10.

Matematyka 3, semestr zimowy 2011/2012

8 listopada 2011

W dalszym ciągu wykładu dla wygody zbiór k-form na powierzchni M oznaczać będziemy $\Omega^k(M)$. Przypominamy, że k-forma na M jest odwzorowaniem przyporządkowującym punktowi $x \in M$ k-kowektor w punkcie x, tzn element $\bigwedge^k \mathsf{T}_x^* M$ w sposób gładki, tzn. funkcje stanowiące współczynniki przy k-kowektorach bazowych związanych z układem współrzędnych na M zależą od współrzędnych w sposób gładki.

Definicja 1. Niech d oznacza operator liniowy

$$\mathsf{d} : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k+1}(M),$$

$k \in 0, 1, \ldots, n$ spełniający następujące warunki:

(1) Wynik działania d na 0-formę (funkcję na M) jest równy zdefiniowanej wcześniej różniczce funkcji;

(2) Jeśli α jest k-formą a β l-formą, to

$$\mathsf{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathsf{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathsf{d}\beta;$$

(3) $\mathsf{d}^2 = 0$, tzn dla każdej k-formy α zachodzi

$$\mathsf{d}(\mathsf{d}\alpha) = 0.$$

Operator d nazywamy *różniczkowaniem zewnętrznym.*

powyższa definicja stanowi zbiór pobożnych życzeń dotyczących operatora d, tzn nie gwarantuje ani jego istnienia, ani jednoznaczności. Okazuje się jednak, że istnieje dokładnie jeden operator różniczkowania zewnętrznego. Zajmijmy się najpierw jednoznacznością.

Fakt 1. *Operator różniczkowania zewnętrznego określony jest jednoznacznie.*

Dowód: Załóżmy, że operator d spełnia warunki definicji różniczkowania zewnętrznego. Ze względu na warunek (2) widać, że wystarczy znać działanie operatora na 0-formach i 1-formach. Na 0-formach działanie jest jednoznacznie określone w definicji. Jeśli teraz zauważymy, że każda 1-forma jest kombinacją liniową form postaci $f\mathsf{d}g$, gdzie f i g są funkcjami, to z warunku (3) wynika, że znajomość różniczki na 0-formach, czyli funkcjach wystarcza, ponieważ

$$\mathsf{d}(f\mathsf{d}g) =_{(1),(2)} \mathsf{d}f \wedge \mathsf{d}g + (-1)^0 f\mathsf{d}\mathsf{d}g =_{(3)} \mathsf{d}f \wedge \mathsf{d}g.$$

Indeksy przy znakach $=$ wskazują z jakiego warunku definicji korzystamy. □

Pora teraz na istnienie operatora różniczkowania zewnętrznego. Najwygodniej byłoby skonstruować taki operator - mielibyśmy wtedy wygodny do stosowania wzór. Zrobimy to korzystając z lokalnego układu współrzędnych. Twierdzenie o jednoznaczności da nam gwarancję, że jeśli zadany przez nas operator będzie spełniał warunki definicji będzie dobrze zdefiniowany niezależnie od układu współrzędnych. Niech więc $\mathcal{O}$ będzie dziedziną układu współrzędnych w M. Same współrzędne oznaczmy (x^i). Wystarczy zdefiniować operator d na formach postaci

$$\alpha_{i_1 i_2 \ldots i_k} \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}.$$

Oto nasza propozycja

Fakt 2. *Operator* d *dany wzorem*

$$d\left(\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\right) = d(\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}) \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$$

jest różniczkowaniem zewnętrznym.

Dowód: Operator d jest liniowy z definicji (zadaliśmy go jedynie na formach bazowych ze współczynnikiem funkcyjnym rozszerzając na pozostałe formy przez liniowość). Warunek (1) jest spełniony automatycznie. Pozostaje sprawdzić warunki (2) i (3). Weźmy

$$\alpha = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}, \qquad \beta = \sum_{j_1 < \dots < j_l} \beta_{j_1 j_2 \dots j_l} \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \dots \wedge \mathsf{d}x^{j_l},$$

wtedy

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j_1 < j_2 < \dots < j_l} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} \beta_{j_1 j_2 \dots j_l} \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \dots \wedge \mathsf{d}x^{j_l}.$$

Aplikujemy operator d:

$$\mathsf{d}(\alpha \wedge \beta) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j_1 < \dots < j_l} \mathsf{d}(\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} \beta_{j_1 j_2 \dots j_l}) \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \dots \wedge \mathsf{d}x^{j_l} =$$
$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j_1 < \dots < j_l} (\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} \mathsf{d}\beta_{j_1 j_2 \dots j_l} + \beta_{j_1 j_2 \dots j_l} \mathsf{d}\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k}) \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \dots \wedge \mathsf{d}x^{j_l} =$$
$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j_1 < \dots < j_l} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} \mathsf{d}\beta_{j_1 j_2 \dots j_l} \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \dots \wedge \mathsf{d}x^{j_l} +$$
$$\sum_{i_1 < \dots < i_k} \sum_{j_1 < \dots < j_l} \beta_{j_1 j_2 \dots j_l} \mathsf{d}\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathsf{d}x^{i_k} \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \dots \wedge \mathsf{d}x^{j_l} =$$
$$\left(\sum_{i_1 < \dots < i_k} \mathsf{d}\alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}\right) \wedge \left(\sum_{j_1 < \dots < j_l} \beta_{j_1 j_2 \dots j_l} \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \dots \wedge \mathsf{d}x^{j_l}\right) +$$
$$(-1)^k \left(\sum_{i_1 < \dots < i_k} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_k} \mathsf{d}x^{i_1} \wedge \mathsf{d}x^{i_2} \wedge \dots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}\right) \wedge \left(\sum_{j_1 < \dots < j_l} \mathsf{d}\beta_{j_1 j_2 \dots j_l} \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \mathsf{d}x^{j_2} \wedge \dots \wedge \mathsf{d}x^{j_l}\right)$$
$$\mathsf{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^k \alpha \wedge \mathsf{d}\beta$$

Pozostaje do sprawdzenia warunek (3). Wystarczy go sprawdzić dla funkcji:

$$\mathsf{dd}f = \mathsf{d}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i} \mathsf{d}x^i\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \mathsf{d}x^j \wedge \mathsf{d}x^i = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right) \mathsf{d}x^j \wedge \mathsf{d}x^i = 0$$

Ostatnia równość wynika z równości drugich pochodnych cząstkowych dla funkcji gładkich. Okazało się, że zaproponowany wzór istotnie określa różniczkę zewnętrzną formy zapisanej za pomocą współrzędnych. Istnieje także wzór niezależny od współrzędnych, ale jest on skomplikowany i wymaga wprowadzania nowych pojęć. □

Pozostaje nam przećwiczyć różniczkowanie na konkretnych przykładach:

Zadanie 1. Obliczyć różniczkę zewnętrzną form α i β określonych na $\mathbb{R}^3$:

$$\alpha = \sin(x^2 z)\mathsf{d}x \wedge dy + 2xy\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z - \mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}z, \qquad \beta = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(xz\mathsf{d}x + yz\mathsf{d}y - (x^2+y^2)\mathsf{d}z\right)$$

♠

Zadanie 2. Obliczyć różniczkę zewnętrzną formy ω określonej na $\mathcal{O}$ jeśli

$$\mathcal{O} = \{(x, y) : \ x > 0\}, \qquad \omega = \frac{x\mathsf{d}y - y\mathsf{d}x}{x^2 + xy + y^2}$$

♠

Różniczka niezerowej k-formy, jak widać z powyższego zadania, może okazać się równa zero. Formę której różniczka jest równa zero nazywamy *formą zamkniętą*. Formę, która sama jest różniczką jakiejś formy nazywamy *formą zupełną*. Z własności różniczki zewnętrznej wiadomo, że każda forma zupełna jest zamknięta. Odwrotnie nie zawsze tak jest. Na przykład forma

$$\frac{x}{x^2 + y^2}\mathsf{d}y - \frac{y}{x^2 + y^2}\mathsf{d}x$$

określona na $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ jest zamknięta ale nie zupełna. Forma ta zapisana w biegunowym układzie współrzędnych to $\mathsf{d}\varphi$. Pamiętamy jednak, że funkcja φ nie jest gładką funkcją określoną na całym $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$.

Zadanie 3. Znaleźć funkcję f taką, że forma ω z poprzedniego zadania jest jej różniczką. Następnie rozważyć tę samą formę na zbiorze $\mathcal{U} = \{(x, y) : \ y > 0\}$ i sprawdzić jak teraz wygląda odpowiednia funkcja? ♠

Zadanie 4. Niech $\mathcal{O} = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : \ x = y = 0\}$ sprawdzić, że forma

$$\sigma = \frac{1}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} \left(x\mathsf{d}y \wedge \mathsf{d}z + y\mathsf{d}z \wedge \mathsf{d}x + z\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}y\right)$$

jest zamknięta i znaleźć 1-formę σ taką, że $\mathsf{d}\sigma = \omega$. *Wskazówka: użyć sferycznego układu współrzędnych.* ♠

Widać więc, że to czy forma zamknięta jest zupełna i jak wygląda odpowiednia forma pierwotna zależy od obszaru na którym ta forma jest określona. Związku między kształtem obszaru a problemem zupełności form zamkniętych dotyczy Lemat Poincaré. Zapiszemy go w wersji dla $\mathbb{R}^n$.