# Wykład 11 i 12

Matematyka 3, semestr zimowy 2011/2012
15 i 18 listopada 2011

Zanim przejdziemy do formułowaniu lematu Poincaré musimy zdefiniować pojęcie transportu formy. Dyskutowaliśmy już wcześniej zachowanie wektorów stycznych i kowektorów stycznych względem odwzorowania. Stwierdziliśmy, że jeśli $F : M \to N$ jest odwzorowaniem gładkim między powierzchniami, to można przenosić za jego pomocą wektory styczne w punkcie $x \in M$ do przestrzeni stycznej w punkcie $F(x) \in N$. Zdefiniowaliśmy innymi słowy odwzorowanie styczne $\mathsf{T}_x F : \mathsf{T}_x M \to \mathsf{T}_{F(x)} N$. Okazało się także, że kowektory można przenosić „w drugą stronę" za pomocą odwzorowania sprzężonego, tzn odwzorowania

$$(\mathsf{T}_x F)^* : \mathsf{T}^*_{F(x)} N \to \mathsf{T}^*_x M.$$

Odwzorowanie sprzężone pozwala przenosić nie tylko pojedyncze kowektory, ale także całe pola kowektorowe, czyli jedno i wieloformy. Jeśli $\alpha$ jest $k$-formą na $N$ możemy zdefiniować $k$-formę $F^*\alpha$ na $M$ podając jej wartość na układzie $k$ wektorów $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ stycznych do $M$:

$$F^*\alpha(v_, \ldots, v_k) = \alpha(\mathsf{T}F(v_1), \ldots, \mathsf{T}F(v_k)).$$

operację $F^*$ nazywamy *cofaniem formy*. Używa się także angielskiego określenia *pull-back*. Zauważmy, że podobnej operacji nie można zdefiniować na polach wektorowych, jeśli odwzorowanie $F$ nie jest różnowartościowe. Załóżmy bowiem, że $x, y$ są punktami w $M$ takimi, że $F(x) = F(y)$. Niech także $A : M \to \mathsf{T}M$ będzie polem wektorowym. Nie mamy żadnej gwarancji, że $\mathsf{T}F(A(x)) = \mathsf{T}F(A(y))$. Oznacza to, że pole wektorowe $A$ pod działaniem $F$ nie przechodzi na pole wektorowe na $N$.

Zanotujmy najważniejsze własności cofania form względem iloczynu zewnętrznego oraz różniczkowania:

(1) $F**$ jest liniowe na formach;
(2) $F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta$;
(3) $F^*\mathsf{d}\alpha = \mathsf{d}F^*\alpha$.

Własności te są dość oczywiste. Własność druga wynika wprost z definicji iloczynu zewnętrznego. Własność trzecią należałby sprawdzić na zeroformach, czyli funkcjach. Dzięki własności pierwszej i drugiej jest to wystarczające. Niech więc $g$ będzie funkcją na $M$. musimy sprawdzić, czy zachodzi równość:

$$F^*\mathsf{d}g = \mathsf{d}F^*g.$$

Cofnięcie funkcji to $F^*g = g \circ F$, zatem różniczka cofnięcia wyraża się przez pochodne złożenia:

$$\mathsf{d}(F^*g)(y) = \mathsf{d}(g \circ F)(y) = \frac{\partial g \circ F}{\partial y^1}\mathsf{d}y^1 + \cdots \frac{\partial g \circ F}{\partial y^n}\mathsf{d}y^n =$$
$$\left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial F^i}{\partial y^1}\right)\mathsf{d}y^1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial F^i}{\partial y^n}\right)\mathsf{d}y^n.$$

Popatrzmy teraz na cofnięcie różniczki. Dla ułatwienia obliczmy to cofnięcie na wektorze $v$

$$(F^*\mathsf{d}g)(v) = \mathsf{d}g(\mathsf{T}F(v)) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x^i} \left\langle \mathsf{d}x^i, \mathsf{T}F(v) \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x^i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F^i}{\partial y^j} v^j =$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial F^i}{\partial y^j} v^j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial F^i}{\partial y^j}\right) v^j =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial F^i}{\partial y^j}\right) \langle \mathsf{d}y^j, v\rangle.$$

Wzór zachodzi dla wszystkich $v$, zatem

$$(F^*\mathsf{d}g) = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial F^i}{\partial y^j}\right) \mathsf{d}y^j,$$

co jest równe $\mathsf{d}F^*g$. Tak naprawdę używaliśmy już tej równości wyrażając formy różniczkowe w różnych zmiennych. Zamianę zmiennych można bowiem traktować jako pewnego rodzaju cofnięcie formy.

Możemy teraz przejść do sformułowania lematu Poincaré:

**Definicja 1.** Obszar $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy gwiaździstym względem punktu $p \in \mathcal{O}$ jeśli dla każdego $x \in \mathcal{O}$ i dla każdego $t \in [0,1]$ punkt $tp + (1-t)x$ też należy do $\mathcal{O}$.

**Przykład 1.** Na obszarze gwiaździstym każda forma zamknięta jest zupełna.

SZKIC DOWODU: Przedstawimy tutaj jedynie szkic dowodu twierdzenia Pioncaré. Pełen dowód jest dość skomplikowany rachunkowo, jednak warto poznać główne punkty, ponieważ polega on na konstrukcji formy pierwotnej. Załóżmy dla uproszczenia, że $\mathcal{O}$ jest gwiaździsty względem punktu 0. Weźmy także zamkniętą formę $\alpha$ zdefiniowaną na $\mathcal{O}$ Niech $F$ będzie odwzorowaniem ściągającym $\mathcal{O}$ do zera, tzn:

$$F : \mathcal{O} \times [1,0] \longrightarrow \mathcal{O}, \qquad F(x^1, \dots x^n, t) = (tx^1, \dots tx^n).$$

Zauważmy, że $F(1,\cdot)$ jest identycznością na $\mathcal{O}$ natomiast $F(0,\cdot)$ ma obraz jednopunktowy równy 0. W tym sensie właśnie mówimy, że $F$ jest ściągające. Potrzebny nam będzie pull-back formy $\alpha$ względem odwzorowania $F$. Jeśli

$$\alpha = \sum \alpha_{i_1\dots i_k}(x)\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}$$

to

$$F^*\alpha = \sum \alpha_{i_1\dots i_k}(t)\mathsf{d}(tx^{i_1}) \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}(tx^{i_k}).$$

Po wykonaniu rachunków okazuje się, że w formie $F^*\alpha$ są składniki zawierające $\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}$ i składniki zawierające $\mathsf{d}t \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_{k-1}}$. Wykorzystywać będziemy także odwzorowanie liniowe $K$ na przestrzeni form na $\mathcal{O} \times [1,0]$ o wartościach w przestrzeni form na $\mathcal{O}$. Polega ono na „odcałkowaniu” części z $\mathsf{d}t$, tzn

$$K(a(t,x)\mathsf{d}t \wedge \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_{k-1}}) = \left(\int_0^1 a(t,x)\mathsf{d}t\right) \mathsf{d}x^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{j_{k-1}},$$

oraz

$$K(b(x,t)\mathsf{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^{i_k}) = 0.$$

Okazuje się (i to jest najtrudniejsza rachunkowa część dowodu), że

$$K(\mathsf{d}F^*\alpha) + \mathsf{d}K(F^*\alpha) = \alpha.$$

Jeśli więc forma $\alpha$ jest zamknieta, to

$$\mathsf{d}F^*\alpha = F^*\mathsf{d}\alpha = 0$$

i z powyższego wzoru zostaje jedynie

$$\mathsf{d}K(F^*\alpha) = \alpha,$$

czyli formą pierwotną do $\alpha$ jest $K(F^*\alpha)$. Metoda poszukiwania formy pierwotnej poprzez wyznaczenie $K(F^*\alpha)$ jest zazwyczaj bardzo skomplikowana rachunkowo. □
W założeniach lematu Poincaré obszar gwiaździsty zastąpić można ściągalnym, tzn takim, który można w sposób ciągły ściągnąć do punktu. Okazuje się, że kluczowe jest, aby obszar „nie miał dziur". Ściągalne jest więc całe $\mathbb{R}^n$, ściągalna jest półpłaszczyzna czy półsfera. Nie jest ściągalna płaszczyzna $\mathbb{R}^2$ z usuniętym punktem $(0,0)$, nie jest ściągalny także torus. Na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$ z usuniętym punktem $(0,0)$ formą zamkniętą ale nie zupełną jest $\mathsf{d}\varphi$. We współrzędnych kartezjańskich zapisujemy ją jako

$$\frac{1}{x^2+y^2}(x\mathsf{d}y - y\mathsf{d}x).$$

Współrzędna $\varphi$ nie jest dobrze określoną gładką funkcją na całym $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$, nie jest więc dobrą funkcją pierwotną dla tej formy na $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Wybierając odpowiedni zakres wartości $\varphi$ możemy ją użyć jako funkcji pierwotnej na mniejszych podzbiorach $\mathbb{R}^2$, np na płaszczyźnie z usuniętą dodatnią półosią $0x$. Oto przykład zastosowania metody podanej w dowodzie lematu Poincaré do poszukiwania formy pierwotnej:

**Przykład 1.** Niech $\omega$ będzie formą określoną na $\mathcal{O} = \{(x,y,z) : \ z>0\}$ wzorem

$$\omega = \frac{1}{z^3}(x\mathsf{d}y\wedge\mathsf{d}z + y\mathsf{d}z\wedge\mathsf{d}x + z\mathsf{d}x\wedge\mathsf{d}y).$$

Znaleźć formę pierwotną do $\omega$ stosując metodę opisaną w dowodzie Lematu Poincaré z odwzorowaniem $F$ ściągającym do punktu $(0,0,1)$:

$$F(t,x,y,z) = (tx, ty, 1-t+tz).$$

To samo zrobić z odwzorowaniem

$$G(t,x,y,z) = (tx, ty, z^t).$$

♣

Najwyższa pora zająć się najważniejszą częścią teorii form różniczkowych. Okazuje się, że formy są obiektami, które świetnie nadają się do całkowania po powierzchniach. Zacznijmy od najprostszego przypadku. Załóżmy, że $D$ jest domkniętym i ograniczonym obszarem w $\mathbb{R}^n$ takim, że jego brzeg $\partial D$ jest kawałkami powierzchnią. Nie będziemy lepiej precyzować rodzaju obszaru $D$ - oprzemy się raczej na intuicji. Niech także $\alpha$ będzie $n$-formą określoną w otoczeniu $\mathcal{O}$ obszaru $D$. Każda $n$-forma na $n$-wymiarowej przestrzeni jest postaci

$$\alpha = a(x^1\ldots,x^n)\mathsf{d}x^1\wedge\mathsf{d}x^2\wedge\cdots\wedge\mathsf{d}x^n$$

Przestrzeń $\mathbb{R}^n$ jest wyposażona w kanoniczną orientację zadaną przez bazę kanoniczną

$$e = (\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}).$$

Orientację tę oznaczymy $\imath_+$. Drugą orientację oznaczymy $\imath_-$. Definiujemy całkę z formy $\alpha$ po obszarze $D$ z orientacją $\imath_+$ wzorem

$$\int_{(D,\imath_+)} \alpha = \int_D a,$$

gdzie całka po prawej stronie równania jest całką w sensie Riemanna z funkcji $a$ po obszarze $D$. Całka z formy $\alpha$ po obszarze $D$ z orientacją $\imath_-$ jest równa

$$\int_{(D,\imath_-)} \alpha = -\int_D a.$$

Niech teraz $F : \mathcal{U} \to \mathcal{O}$ będzie dyfeomorfizmem obszarów $\mathcal{U}$ i $\mathcal{O}$ zawartych w $\mathbb{R}^n$. Odwzorowanie styczne w każdym punkcie jest izomorfizmem liniowym, tzn w szczególności przeprowadza bazę na bazę. Mogą zdarzyć się dwie sytuacje: $\mathsf{T}_y F$ przeprowadza bazę o orientacji $\imath_+$ na bazę o tej samej orientacji lub na bazę o orientacji przeciwnej. W pierwszym przypadku wyznacznik macierzy $\mathsf{T}_y F$ w bazie kanonicznej jest dodatni, w drugim przypadku ujemny. Istotnie, jeśli $f_i = \mathsf{T}_y F(e_i)$, to

$$[f_i]^e = [\mathsf{T}_y F]^e{}_e [e_i]^e.$$

Oznacza to, że

$$[id]^e{}_f = [\mathsf{T}_y F]^e{}_e = F'(x).$$

Zgodność bądź niezgodność orientacji związanych z bazami $f$ i $e$ zależy od znaku wyznacznika macierzy przejścia a więc od znaku wyznacznika odwzorowania stycznego (czyli pochodnej odwzorowania $F$). Zauważmy przy okazji, że jeśli odwzorowanie $F$ jest dyfeomorfizmem, to znak wyznacznika pochodnej odwzorowania $F$ nie zmienia się od punktu do punktu. Wyznacznik wyraża się przez pochodne cząstkowe funkcji tworzących odwzorowanie $F$, jest więc ciągłą funkcją współrzędnych. W żadnym punkcie także wyznacznik ten nie jest równy zero. Ciągłość prowadzi więc do wniosku, że albo wyznacznik ten jest dodatni na całym obszarze, albo na całym ujemny. Niech teraz $S$ będzie obszarem nadającym się do całkowania zawartym w $U$, zaś $\alpha$ będzie formą na $\mathcal{O}$. Obliczmy całkę z $F^*\alpha$ po $S$ z orientacją dodatnią $\imath_+$. Oznaczmy $(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ współrzędne w $\mathcal{O}$ i $(y^1, y^2, \ldots, y^n)$ współrzędne w $\mathcal{U}$ takie, że $x^i = F^i(y^1, \ldots, y^n)$. Jeśli teraz $\alpha = a(x^1, \ldots, x^n)\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n$ to

$$F^*\alpha = a(F^1(y), \ldots, F^n(y))\mathsf{d}F^1(y) \wedge \cdots \wedge F^n(y) = a(F^1(y), \ldots, F^n(y)) \det F'(y)\mathsf{d}y^1 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}y^n$$

Możemy teraz obliczyć całkę

$$\begin{aligned}\int_{(S,\imath_+)} F^*\alpha &= \int_{S,} a(F^1(y), \ldots, F^n(y)) \det F'(y) = \\ &\int_S a(F^1(y), \ldots, F^n(y))\mathrm{sgn}\,(\det F'(y))|\det F'(y)| = \\ &\mathrm{sgn}\,(\det F'(y)) \int_S a(F^1(y), \ldots, F^n(y))|\det F'(y)| = \\ &\mathrm{sgn}\,(\det F'(y)) \int_{F(S)} a(x^1, \ldots, x^n) = \\ &\mathrm{sgn}\,(\det F'(y)) \int_{(F(S),\imath_+)} a(x^1, \ldots, x^n)\mathsf{d}x^1 \wedge \mathsf{d}x^2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{d}x^n = \\ &\mathrm{sgn}\,(\det F'(y)) \int_{(F(S),\imath_+)} \alpha\end{aligned}$$

Okazało się więc, że w zależności od znaku wyznacznika $F'$ mamy

$$\int_{(S,\imath_+)} F^*\alpha = \int_{(F(S),\imath_+)} \alpha \quad \text{lub} \quad \int_{(S,\imath_+)} F^*\alpha = \int_{(F(S),\imath_-)} \alpha$$

Rachunki, które wykonaliśmy prowadzą do wniosku, że całka z formy jest poprawnie zdefiniowana na obszarze zorientowanym. Odwzorowanie $F$ należy traktować jako odwzorowanie obszarów zorientowanych.

Możemy teraz zdefiniować całkę po obszarze na powierzchni $M$. Niech $M$ będzie $k$-wymiarową zorientowaną powierzchnią i $\alpha$ $k$-formą zdefiniowaną na $M$. Orientację $M$ oznaczymy $\imath$. Niech teraz $D$ będzie obszarem na powierzchni $M$ nadającym się do całkowania. Załóżmy najpierw, że $D$ mieści się w obrazie jednej parametryzacji

$$\kappa : \mathbb{R}^k \supset \mathcal{O} \longrightarrow M.$$

zadbamy także o to, aby wybrać parametryzację zgodną z orientacją, tzn taką, żeby kanoniczna orientacja $\mathbb{R}^k$ przechodziła przy parametryzacji $\kappa$ na wybraną orientację $\imath$. Definiujemy całkę

$$\int_{(D,\imath)} \alpha = \int_{(\kappa^{-1}(D),\imath_+)} \kappa^*\alpha.$$

Oczywiście jeśli obszar nie mieści się w obrazie jednej parametryzacji musimy „posklejać” go z kawałków mieszczących się w obrazach kilku parametryzacji. Precyzyjnie zrobić to można używając pojęcia rozkładu jedności. Nie będziemy jednak zagłębiać się w to zagadnienie po raz kolejny polegając na intuicji.

**Przykład 2.** Zajmijmy się teraz rozwiązaniem konkretnego przykładu. Obliczmy całkę z obcięcia formy $\mathsf{d}x \wedge \mathsf{d}z$ do sfery dwuwymiarowej o promieniu 1 po fragmencie sfery o promieniu 1, dla którego $z \geqslant 0$ i $x \geqslant 0$. Na sferze wybierzemy orientację zgodną z orientacją zadawaną przez bazę $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y})$ w punkcie $(0,0,1)$. ♣